

路南柯 题解

xiaolilsq

2024 年 12 月 4 日

题意简述

称一个 $1 \sim n$ 的排列 $\{p\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 是一棵 n 个点、点编号为 1 至 n 的树 T 的拓扑序列，当且仅当对于任意 $1 \leq i < n$ ，恰好存在唯一的 $j > i$ 满足 a_i 与 a_j 之间有连边。给定树 T ，你需要给出尽可能少的该树的拓扑序列 $\{p_1\}, \{p_2\}, \dots, \{p_k\}$ ，使得有且仅有树 T 满足 $\{p_1\}, \{p_2\}, \dots, \{p_k\}$ 均为该树的合法拓扑序列。

题解

称一个拓扑序列的最末尾的点为该拓扑序列的“关键点”，事实上一个拓扑序列的翻转可以视为以“关键点”为根进行的一次任意遍历，这个遍历仅仅要求每个点父亲的遍历顺序在它前面。

设给出的第一个拓扑序列为 p_1, p_2, \dots, p_n ，以 p_n 为根，该信息相当于 p_i 的父亲可以在 p_{i+1}, \dots, p_n 中选。点编号不重要，考虑直接重排，规定 1 为根而 i 的父亲编号小于 i 。对于已经确定的树形态，考虑如何区分一个点的父亲和它祖父，或者说如何选取一些序列使得它的父亲唯一而不是有可能是它的祖父，容易发现这需要保证它的父亲子树中至少有一个“关键点”。由此除去菊花以外删去所有叶子后的叶子数量就是至少需要的拓扑序列数量。

而实际上除去菊花以外我们确实可以构造到最优，具体而言难点在于区分叶子节点的父亲和兄弟，而由于至少给定两个的拓扑序列，我们只需要在遍历其父亲孩子的时候以两种不同的顺序遍历即可。

吐槽环节

Fun fact: 这题本来也是两问，还有一问是给定 k 个拓扑序列求合法的树数量，这个可以转化为 k 维偏序关系，直接 bitset $O(n^2k/w)$ 做即可，是非常清新的 NOIP 题！