

颠倒歌 题解

xiaolilsq

2024 年 12 月 4 日

题意简述

对于树 $T(V, E)$ 和 $S \subseteq V$, 记 $f(S, T)$ 表示 T 的对 S 的导出子图 (即仅保留 S 中的点和两端都在 S 中的边得到的图) 中度数小于等于 1 的点的数量。

对于两棵树 $T_1(V_1, E_1), T_2(V_2, E_2)$, 若 $V_1 = V_2$, 我们称 $T_1 \preceq T_2$ 当且仅当对于任意 $S_2 \subseteq V_2$, 存在 S_1 满足 $S_2 \subseteq S_1 \subseteq V_1$ 且 $f(S_1, T_1) \leq f(S_2, T_2)$ 。

称 T_1, T_2 等价当 $T_1 \preceq T_2$ 且 $T_2 \preceq T_1$, 记作 $T_1 \sim T_2$ 。该等价关系将 n 个点的有标号树划分成若干等价类。

问:

1. 给定 k 棵 n 个点的树 T_1, T_2, \dots, T_k , 求满足 $T \preceq T_i, \forall 1 \leq i \leq k$ 的有标号树 T 构成的等价类数量。
2. 给定 k 棵 n 个点的树 T_1, T_2, \dots, T_k , 求满足 $T_i \preceq T, \forall 1 \leq i \leq k$ 的有标号树 T 数量。

注意两问的计数对象不同。两问答案均对 998,244,353 取模。

题解

关键点在于如何判断两棵树 T_1, T_2 是否具有 $T_1 \preceq T_2$ 的关系。

按照定义来，任取一个 $S_2 \subseteq V_2$ ，那么贪心地就是要找到一个 S_1 使得 $f(S_1, T_1)$ 尽量小。只有导出子图中度数小于等于 1 的点是统计到 $f(S_1, T_1)$ 中的，那我们自然是希望能够往 S_2 中“添加”恰到好处的点得到 S_1 。

考虑取 T_1 中包含 S_2 的最小连通块作为 S_1 ，该连通块内所有叶子度数都小于等于 1，而且这些叶子均是“无法删去的”，否则与最小连通块矛盾，而且“添加”其它额外的点不会让叶子数量减少，所以我们可以得知 $f(S_1, T_1)$ 最小取到 T_1 中包含 S_2 的最小连通块叶子数量。

不妨记 $g(S_2, T_1) = \min_{S_2 \subseteq S_1} f(S_1, T_1)$ ，记 $s(S_2, T_1)$ 为 T_1 中包含 S_2 的最小连通块，那么上述讨论我们得知 $g(S_2, T_1) = f(s(S_2, T_1), T_1)$ ，同时限制条件也可以写成

$$\forall S_2, g(S_2, T_1) \leq f(S_2, T_2)。$$

题解

因为直接按照定义条件是任选点集 S_2 ，这是比较复杂的，考虑减小 S_2 的选取范围。如果存在 S_2 满足 $g(S_2, T_1) > f(S_2, T_2)$ ，首先我们贪心地添加点到 S_2 中使其变成 $s(S_2, T_2)$ ，这么做会让 $f(S_2, T_2)$ 不增而 $g(S_2, T_1)$ 不降，由此我们只需要考虑 S_2 是连通块的情况。通过一些复杂的讨论后我们可以得出只需要考虑 S_2 是链的情况，更进一步只需要考虑极长链的情况。

题解

我们称一棵树 $T(V, E)$ 的“特征图”为无向图 $\mathcal{G}(T) = G(V, E')$ ，其中 E' 为所有的点对 (u, v) 满足 u 到 v 的唯一路径除去两个端点外的其它点在 T 中度数均恰好等于 2。那么可以证明 $T_1 \preceq T_2$ 当且仅当 $\mathcal{G}(T_2)$ 是 $\mathcal{G}(T_1)$ 的子图。

证明如下：

- ▶ 若 $T_1 \preceq T_2$ ，若 (u, v) 在图 $\mathcal{G}(T_2)$ 中，首先 $s(\{u, v\}, T_2)$ 是链，所以 $s(\{u, v\}, T_1)$ 也必须是链。若 $s(\{u, v\}, T_1)$ 这条链除去端点存在度数大于 2 的，那么说明存在 w 使得 $g(\{u, v, w\}, T_1) = 3$ ，而 $(u, v) \in \mathcal{G}(T_2)$ 的限制保证了 $f(s(\{u, v, w\}, T_2), T_2) = 2$ ，由此到处矛盾，所以 $(u, v) \in \mathcal{G}(T_1)$ 。
- ▶ 若 $\mathcal{G}(T_2)$ 是 $\mathcal{G}(T_1)$ 的子图，由上述讨论知我们只需要考虑是链的 S_2 ，而此时按照度数大于 2 的点拆开路径容易发现 $s(S_2, T_1)$ 也必然是链，由此 $T_1 \preceq T_2$ 。

这里的“特征图”实际上形如若干个团通过度数大于 2 的点连成了一棵树，将这些点称为“关键点”，则每个团内“关键点”数不超过 2。

题解

由此同时我们可以得出 $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}(T_1) = \mathcal{G}(T_2)$ ，而且一切限制都可以转化到边的存在限制。

对于第 1 问，相当于限制 $\mathcal{G}(T_1), \mathcal{G}(T_2), \dots, \mathcal{G}(T_k)$ 必须是 $\mathcal{G}(T)$ 的子图，那么 $\mathcal{G}(T)$ 必须要包含其中的所有边，而“特征图”的特性限制了环只能出现在团中，所以我们只需要连所有边然后建立圆方树，然后圆方树中每个方点连接的所有点都必须在 $\mathcal{G}(T)$ 的同一个团中。剩下的就是细节的树形 dp 了，这部分细节相信大家都会。

由于我们只关心圆方树的形态，这里并不需要真的连接每条边，只需要把每个团连成环即可。

对于第 2 问，相当于限制 $\mathcal{G}(T)$ 必须是 $\mathcal{G}(T_1), \mathcal{G}(T_2), \dots, \mathcal{G}(T_k)$ 的子图，直接取交，可以证明如果有解交出来的一定是连通的若干个团，形成类似的树结构，唯一的区别在于每个团内的关键点可能不止 2 个，不过这对我们统计有标号树数量不构成影响，直接乘法原理每个团方案数乘起来即可。

吐槽环节

Fun fact 1: 其实这题是从 CF1707E Replace 出发想到的，从这类问题能否扩展到树上慢慢得到的这题。

Fun fact 2: 这题一开始出的时候两问都是求等价类数量，但是验题的时候突然发现第 2 问的某个结论假了，导致这题最后只能两问询问不同，出得如此别扭，大家也可以想想第 2 问等价类计数怎么做，本来第 2 问等价类计数也是一个讨论难点的。

Fun fact 3: 这场其他两道题都很清新啊，代码量很短，这题 std 将近 10kb，该给大家伙上上强度了。