Maximal Matching 2

简要题意

给定 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 01 序列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。称二元组 (i, j) **构成匹配**当且仅当 $i < j$ 且 $b_i = 0$ 且 $b_j = 1$。

定义**极大匹配方案** $S_{\max}$ 为满足以下所有条件的二元组集合：

- 每个二元组都构成匹配，每个位置只出现至多一次；
- 满足以上条件的前提下 $a_u = a_v$ 的二元组 (u, v) 数量最多；
- 满足以上条件的前提下 $|S_{\max}|$ 最大。

对序列 (a, b) 进行 m 次修改，对于初始情况和每次修改之后的情况，输出极大匹配方案的大小。

$n, m \leq 2 \times 10^5$

$m = 0$

先考虑不带修的情况。

最大化 a_i 相同的匹配数量只需要在每种 a_i 内部求最优匹配数量即可。难点在于选择合适的同色匹配使得不同色匹配数量尽量大。

$m = 0$

先考虑不带修的情况。

最大化 a_i 相同的匹配数量只需要在每种 a_i 内部求最优匹配数量即可。难点在于选择合适的同色匹配使得不同色匹配数量尽量大。

固定一种 a_i。将 $b_i = 0$ 的元素看作 $+1$，$b_i = 1$ 的元素看作 -1。

令 s_i 表示前 i 个元素之和。则我们需要留最少数量的 $+1$ 和 -1 给不同色匹配，且剩余部分能够完美匹配。同时，我们希望对于每种颜色保留的 $+1$ 都尽量靠前，-1 都尽量靠后。

$m = 0$

有结论：应当保留所有前缀最小值位置的 -1，以及所有后缀最小值位置的 $+1$。

证明：假设前缀最小值位置依次为 $i_1 \dots i_k$，则 $[1, i_k]$ 内至少保留 k 个 -1，否则剩余部分必有前缀和 < 0，无法完美匹配。因此上述保留 -1 的方式最优。$+1$ 同理。而在这样的保留方案下，剩余部分任意前缀的前缀和都大于等于 0 且序列和为 0，此时存在完美匹配。

这样我们可以直接求出前缀和后缀最小值位置，把它们插入到同一个序列里再求一边匹配个数。复杂度 $O(n)$。

$m > 0$

对于单点修改，可以看作从一种颜色中先删除一个元素再插入一个元素。两部分均只会影响 $O(1)$ 个前缀最小值和后缀最小值位置。

对每种颜色使用线段树维护最小前缀和，再使用全局的线段树维护不同色匹配即可。

总时间复杂度为 $O(n + m \log n)$。