

Expectation of Product

有一个长度为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n 。初始序列的所有元素均为 0。

对序列 a 进行 c 次操作，每次随机选择整数 $1 \leq x \leq n - m + 1$ ，其中选到 $y (1 \leq y \leq n - m + 1)$ 的概率为 $\frac{b_y}{\sum_{i=1}^{n-m+1} b_i}$ ，将 $a_{x \sim x+m-1}$ 增加 1。

求操作完成后序列中所有元素的乘积的期望模 998244353。

$$n \leq 50$$

考虑乘积期望的组合意义。假设 $[l_d, r_d]$ 为第 d 次加的区间，可以将 a_i 转写作 $\sum_{d=1}^c [l_d \leq i \leq r_d]$ ，那么

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n a_i\right] = \sum_{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in [1, c]} \Pr[\forall i \in [1, n], l_{b_i} \leq i \leq r_{b_i}].$$

考虑乘积期望的组合意义。假设 $[l_d, r_d]$ 为第 d 次加的区间，可以将 a_i 转写作 $\sum_{d=1}^c [l_d \leq i \leq r_d]$ ，那么

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n a_i\right] = \sum_{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in [1, c]} \Pr[\forall i \in [1, n], l_{b_i} \leq i \leq r_{b_i}].$$

固定序列 b_1, \dots, b_n ，考虑如何计算概率。（这个 b 不是题面的概率权重）

对于第 x 次操作，如果 b 中没有出现 x 自然可以不用管第 x 次操作干了啥。否则这次操作的区间满足序列 b 的概率只与 x 在 b 中第一次和最后一次出现的位置有关，且它们的距离不能超过 $m - 1$ 。

由此可以设计 DP: 设 $dp_{i,j,S}$ 表示当前考虑 $b_{1\dots i}$, $\{b_{1\dots i}\} = j$, S 表示所有满足以下条件的 k 组成的集合:

- $k \in [i - m + 2, i]$,
- b_k 在 b 中的第一次出现位置为 k ,
- b_k 在 b 中的最后一次出现位置 $> i$ 。

转移时只需要考虑 b_i 是否在前面出现过, 以及 b_i 的最后一次出现位置是否为 i 。需要记录出现过的 b 的数量是因为最后需要把颜色分配到操作编号上, 有一个组合数的贡献。

由此可以设计 DP: 设 $dp_{i,j,S}$ 表示当前考虑 $b_{1\dots i}$, $\{b_{1\dots i}\} = j$, S 表示所有满足以下条件的 k 组成的集合:

- $k \in [i - m + 2, i]$,
- b_k 在 b 中的第一次出现位置为 k ,
- b_k 在 b 中的最后一次出现位置 $> i$ 。

转移时只需要考虑 b_i 是否在前面出现过, 以及 b_i 的最后一次出现位置是否为 i 。需要记录出现过的 b 的数量是因为最后需要把颜色分配到操作编号上, 有一个组合数的贡献。

时间复杂度为 $O(n^2 m 2^m)$ 。另外注意到 $m > \frac{n}{2}$ 的时候中间的部分总是 c , 可以把它们删掉, 所以总是可以认为 $m \leq \frac{n}{2}$ 。

设超出 $[1, n]$ 的其他位置 i 上有 $a_i = 0$ 。注意到以上做法在 m 比较大的时候比较困难, 考察 m 比较大的时候会发生什么。

设超出 $[1, n]$ 的其他位置 i 上有 $a_i = 0$ 。注意到以上做法在 m 比较大的时候比较困难，考察 m 比较大的时候会发生什么。

$3m \geq n$ 时，我们有 $\forall i \in [1, m], a_i + a_{m+i} + a_{2m+i} = c$ 。同时注意到以下事实：

- c 次操作能够得到序列 $\{a_i\}$ ，当且仅当 $a_i + a_{m+i} + a_{2m+i} = c$ 对 $1 \leq i \leq m$ 总成立，且 $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq c$ ， $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_{2m+1} \leq c$ 。

也就是 $a_{1 \dots m}$ 不降， $a_{2m+1 \dots 3m}$ 不升。必要性显然。对于充分性的证明，可以发现 $a_{1 \dots m}$ 不降可以直接差分得到从 $1 \sim m$ 开始的区间加操作次数， $a_{2m+1 \dots 3m}$ 则可以得到以它们结尾的。最后还剩 $m+1 \sim 2m$ 的操作次数，通过操作次数总和为 c 推出其操作次数，而 $a_i + a_{m+i} + a_{2m+i} = c$ 保证了这个操作次数非负且对于中间所有数都是对的。

注意到充分性的证明告诉我们确定序列 a 就等于确定每种区间加操作的次数，也就确定了序列 a 的出现概率。

考虑从前往后加入元素并 DP 维护期望。为了保证 $a_i + a_{2m+i} \leq c$ 得两个数一起 DP，状态为 $f_{i,a_i,a_{2m+i}}$ ，转移是直接的。

注意到充分性的证明告诉我们确定序列 a 就等于确定每种区间加操作的次数，也就确定了序列 a 的出现概率。

考虑从前往后加入元素并 DP 维护期望。为了保证 $a_i + a_{2m+i} \leq c$ 得两个数一起 DP，状态为 $f_{i,a_i,a_{2m+i}}$ ，转移是直接的。

直接做的时间复杂度为 $O(nc^4)$ 。但根据 Part 1 我们可以发现答案是关于 c 的 n 次多项式，所以可以对于每个 $c' \in [0, n]$ 做一遍最后插值。复杂度 $O(n^6)$ 。

注意到充分性的证明告诉我们确定序列 a 就等于确定每种区间加操作的次数，也就确定了序列 a 的出现概率。

考虑从前往后加入元素并 DP 维护期望。为了保证 $a_i + a_{2m+i} \leq c$ 得两个数一起 DP，状态为 $f_{i,a_i,a_{2m+i}}$ ，转移是直接的。

直接做的时间复杂度为 $O(nc^4)$ 。但根据 Part 1 我们可以发现答案是关于 c 的 n 次多项式，所以可以对于每个 $c' \in [0, n]$ 做一遍最后插值。复杂度 $O(n^6)$ 。

在 $3m < n$ 时使用 $O(n^2m2^m)$ 的做法， $3m \geq n$ 的时候使用以上做法，可以通过本题。

扩展这个做法的第二部分，其实可以得到 $2^{O(\sqrt{n \log n})}$ 的时间复杂度。