通信 题解

xiaolilsq

2025 年 1 月 22 日

题意简述

有若干个节点，它们一开始分别存储有一个数字 $a_i \in \{0,1\}$，它们想要通过 K 轮通信知道其它每个节点存储的数字。
每一轮通信开始的时候，每个节点 i 对每个节点 j，都会选择一个数字 $c_{i,j} \in \{0,1\}$，表示它将会向节点 j 发送数字 $c_{i,j}$，而在这轮通信结束的时候，节点 j 会收到所有节点向它发送的数字的和，具体而言节点 j 会收到一个数字 $s_j = \sum_i c_{i,j}$。
现在给定 K，你需要找到一个尽量大的 N，满足在通过 K 轮通信之后每个节点都可以知道所有节点存储的数字。

题解

不妨认为节点 i 在轮次 j 之后知道的信息集合为 $S_{i,j} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$，或者说在轮次 j 之后，对于任意的 $x \in S_{i,j}$，节点 i 都知道节点 x 存储的信息 a_x。并且我们认为节点 i 刚好且只知道 $S_{i,j}$ 比特的信息，事实上这其实是很浪费的，大家可以考虑在这个地方优化然后爆杀标算。
随着轮次的增加，每个节点获得信息都会逐渐增加，由此我们知道对任意 i，有 $\{i\} = S_{i,0} \subseteq S_{i,1} \subseteq \cdots \subseteq S_{i,K} = \{1, 2, \ldots, N\}$，由此我们的优化目标就变成了尽量增加 $\Delta_{i,j} = S_{i,j} - S_{i,j-1}$ 的大小。
直接考虑每轮通信每个节点可以获得的信息量。每个节点在每轮结束后会收到的数字范围为 $[0, N]$，去除掉自己上一轮自己给自己发送的数字也就是只有 N 种可能。
希望每一轮每个节点都能获得尽量多的信息，方便起见直接采用二进制编码，于是我们知道每一轮每个节点最多可以得知 $\lfloor \log_2 N \rfloor$ 比特的信息。
由此我们得到了一个上界 $|\Delta_{i,j}| \leq \lfloor \log_2 N \rfloor$。

题解

是不是任意满足的 $|\Delta_{i,j}| \le \lfloor \log_2 N \rfloor$ 的 $S_{i,j}$ 都是合法的呢？显然并不是。
按照二进制编码的方式，我们首先要给出第 j 轮打算传递给节点 i 的信息 $\Delta_{i,j}$ 的一个排列 $b_{i,j,0}, \ldots, b_{i,j,d-1}$，然后将其编码为 $(b_{i,j,d-1} b_{i,j,d-2} \ldots b_{i,j,0})_2$。
我们期望节点 i 在轮次 j 收到的数字为 $s_{i,j} = (b_{i,j,d-1} b_{i,j,d-2} \ldots b_{i,j,0})_2$，由此也就是说需要有 2^0 个节点知道 $b_{i,j,0}$ 的信息，2^1 个节点知道 $b_{i,j,1}$ 的信息，……，2^{d-1} 个节点知道 $b_{i,j,d-1}$ 的信息，且这些节点没有重合，这样这些节点才能选择正好的信息传递给节点 i，使得 $s_{i,j}$ 满足要求。这个的判定刚好就是一个匹配的过程。此外按照这个要求我们还可以立即得到 $|\Delta_{i,1}| \le 1$，因为第 1 轮交互前每个节点的信息都只有一个节点知道。
由此我们便能判断一个选择 $\{S_{i,j}\}$ 的方案是否合法，就是看 $\Delta_{i,j}$ 能否拆成一个排列满足上述要求即可。
接下来就很简单了，直接搜出一个合法的方案即可。

题解

搜索还是需要一定技巧的，不如直接按照 $K = 1, 2, \ldots, 7$ 来看一下每次的 $C(K)$ 如何拆，或者说看看 $|\Delta_{0,1}|, \ldots, |\Delta_{0,K}|$ 该如何确定，也即每一轮每个点获得的信息量是多少。
$C(1) = 2$，每轮获取信息量上界为 1，总信息量上限为 2，拆成 1。
$C(2) = 4$，每轮获取信息量上界为 2，总信息量上限为 4，拆成 $1, 2$。
$C(3) = 6$，每轮获取信息量上界为 2，总信息量上限为 6，拆成 $1, 2, 2$。
$C(4) = 11$，每轮获取信息量上界为 3，总信息量上限为 11，拆成 $1, 3, 3, 3$。
$C(5) = 14$，每轮获取信息量上界为 3，总信息量上限为 14，拆成 $1, 3, 3, 3, 3$。
$C(6) = 21$，每轮获取信息量上界为 4，总信息量上限为 22，拆成 $1, 3, 4, 4, 4, 4$。
$C(7) = 25$，每轮获取信息量上界为 4，总信息量上限为 26，拆成 $1, 3, 4, 4, 4, 4, 4$。

题解

可以注意到除了最后两个，其它总信息量上限都卡得很死，而这个限制其实对搜索来说是比较好的，因为这样方便我们在较少的搜索的轮次不满足条件的时候就可以直接剪枝加速搜索。然后对于最后两个数据点，靠前的轮次每个节点拥有的信息是更少的，所以我们就放宽第 2 轮传递信息量的限制，这样更加容易搜出答案。
此外第 1 轮只会传递 1 比特信息，第 1 轮直接搜索是十分浪费的，很容易第 2 轮传递的信息量直接不可能满足要求，由此我们手动钦定第 1 轮传递的信息，也可以加速搜索过程。
这个搜索本来可以打表的，不过由验题人实践，不需要打表每次调用 init 的时候直接搜也是可以过的。

其它讨论

可以见到 std 其实是非常松的，浪费了很多有用的信息。首先便是前面上界分析的时候，每一轮能够传递的信息量是 $\log_2 N$，但是我们实际上用到的只有 $\lfloor \log_2 N \rfloor$，而且第一轮也只传递了 1 比特信息。
K 轮最多获得的信息只有 $K \log_2 N$ 比特，由此如果可能存在一个策略那么需要满足 $K \log_2 N \geq N - 1$，由此得到 $(N-1)/\log_2 N \leq K$，由此我们可以得到可行的 N 的一个上界。
出这题的一个契机：因为 IOI 考了通信题，所以 CTS 也需要通信题，通信题是好文明。

吐槽环节