

仙人掌染色

卡内基梅隆大学 徐明宽

题目大意

- 输入一棵仙人掌（对于36%的数据是一棵树）
- 可以将一些边染色，每条边有对应的花费
- 每对异色且有公共结点的边可以获得能量
 - 与在这个公共结点上的“距离”成正比
- $n, m \leq 2 * 10^5$

暴力

- $O(2^m * m^2)$
- 期望得分16分

观察

- 对于每个结点，只有黑色度数有用而顺序没用！
 - （因此输入的坐标没用）
- 猜想：每个结点的黑色度数都能取到度数的一半？
- 反例：一个三角形
- 可以拿到 $w_i = 0$ 的1分

树形DP

- $dp[u][0/1]$ 表示以 u 为根的子树在 u 到父亲为 白色/黑色 时的答案
- 转移使用辅助DP: $buffer[c][b]$ 表示前 c 个孩子有 b 条黑色边的答案
- $O(n^2)$, 期望得分19分

树形DP+贪心

- 辅助DP像背包，但每一项占用的“空间”（黑色边条数）都是1
- 先贪心地对u每个孩子v取 $dp[v][0]$ 和 $dp[v][1]$ 中的较大值
- 记录取了多少条黑色边
- 如果大于u度数的一半的话就贪心地将一部分 $dp[v][1]$ 调整为 $dp[v][0]$
- 反之亦然
- $O(n \log n)$ ，期望得分30分
- 可以使用线性求中位数优化至 $O(n)$ ，但不在于本题考察范围内

圆方树上DP

• <https://oi-wiki.org/graph/block-forest/> 或 <https://immortalco.blog.uoj.ac/blog/1955>

• $dp[u][0/1/2]$ 表示以 u 为根的子树
在 u 到父亲有 $0/1/2$ 条黑色边时的答案

• 对于圆点

• 相同的辅助DP

• $buffer[c][b]$ 表示前 c 个孩子有 b 条黑色边的答案

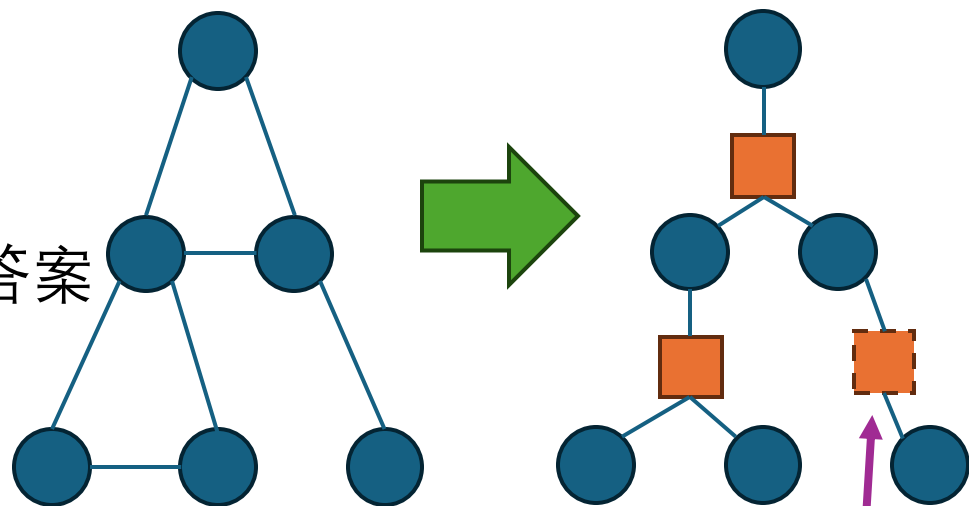
• $dp[u][0/1/2]$ 不包含父亲的花费

• 对于方点

• $buffer[c][0/1][0/1]$ 表示前 c 个孩子，环上第1条边为 白色/黑色，第 $c+1$ 条边为 白色/黑色的答案

• $dp[u][0/1/2]$ 包含父亲的花费

• $O(n^2)$ ，期望得分58分



这个方点根据圆方树定义的不同是可选的

圆方树上DP+贪心?

- 将对于圆点的辅助DP改为贪心
- 对于每个圆点 u 的孩子 v 取 $dp[v][0/1/2]$ 中的最大值
- 如果黑色边条数大于 u 度数的一半的话就贪心地将一些 $dp[v][2]$ 改为 $dp[v][0]$ 、一些 $dp[v][2]$ 改为 $dp[v][1]$ 、一些 $dp[v][1]$ 改为 $dp[v][0]$?
- 反之亦然
- 像每一项占用的“空间”（黑色边条数）为1或2的背包，直接贪心可能不对
- 只能保证输入是一棵树时是正确的，期望得分30分
- 实际有可能可以“骗”到更多分?

圆方树上DP+贪心调整

- 将对于圆点的辅助DP改为贪心
- 使用4棵平衡树（可以是std::set）来维护所有可以将黑色边条数减二、减一、加一、加二的机会
- 贪心选择如下调整机会：
 - +2（即，在“+2”的平衡树中选择最便宜的一个机会，下同），-2, +1, -1, +2-1, -2+1, +2-2, +2-1-1, -2+1+1, +1-1
- 任意一种最终会增加答案的调整方式都能拆解成这10种调整方式组成的序列，且满足第一步会增加答案
- $O(n \log n)$ ，期望得分100分
- 可能可以使用线性求中位数优化至 $O(n)$ ，但不在本题考察范围内

谢谢大家