WC / CTS 2025 **士兵**

Kubic

2025 年 1 月 20 日

简要题意

给定序列 $a_{1\dots n}$ 和 $b_{1\dots n}$。每次你可以花费 m 的代价将 a 的一段区间减 1。最后对于每个不超过 0 的 a_i，你会获得 b_i 的收益，其中 b_i 可能为负。最大化收益总和减去代价总和。

$n \le 5 \times 10^5$

吐槽

TBA

正解

令第 i 个人共被扣除 c_i 点血量。特殊地，$c_0 = c_{n+1} = 0$。根据经典 NOIP 贪心题，可以得到最少操作次数等于 $\sum\limits_{i=1}^{n} \max(c_i - c_{i-1}, 0)$。

正解

令第 i 个人共被扣除 c_i 点血量。特殊地，$c_0 = c_{n+1} = 0$。根据经典 NOIP 贪心题，可以得到最少操作次数等于 $\sum_{i=1}^{n} \max(c_i - c_{i-1}, 0)$。

对于一个 $i \in [1, n]$，如果 $c_i > c_{i-1}$ 且 $c_i \neq a_i$ 那么我们可以将 $c_i \leftarrow c_i - 1$，显然这样调整不会减少收益也不会减少代价。同理，如果 $c_i < c_{i-1}$ 且 $c_i \neq a_i - 1$ 那么我们可以将 $c_i \leftarrow c_i + 1$。

根据上述调整我们可以发现，一定存在一组最优解，使得对每个 i，$c_i = c_{i-1}, c_i = a_i, c_i = a_i - 1$ 三个等式中至少有一个成立。

正解

令第 i 个人共被扣除 c_i 点血量。特殊地，$c_0 = c_{n+1} = 0$。根据经典 NOIP 贪心题，可以得到最少操作次数等于 $\sum\limits_{i=1}^{n} \max(c_i - c_{i-1}, 0)$。

对于一个 $i \in [1, n]$，如果 $c_i > c_{i-1}$ 且 $c_i \neq a_i$ 那么我们可以将 $c_i \leftarrow c_i - 1$，显然这样调整不会减少收益也不会减少代价。同理，如果 $c_i < c_{i-1}$ 且 $c_i \neq a_i - 1$ 那么我们可以将 $c_i \leftarrow c_i + 1$。

根据上述调整我们可以发现，一定存在一组最优解，使得对每个 i，$c_i = c_{i-1}, c_i = a_i, c_i = a_i - 1$ 三个等式中至少有一个成立。

我们相当于要钦定一些 $c_i = a_i$ 或 $c_i = a_i - 1$。对于一个没有被钦定的 c_i，设它前面第一个被钦定的位置为 c_j，那么根据上述结论有 $c_i = c_j$。

正解

对此进行 dp。设 $dp_{i,j}$ 表示当前考虑 $a_1 \dots a_i$，且 $c_i = a_i - j$ 的最大收益。其中 $j \in [0, 1]$。

枚举 $i' < i, j' \in \{0, 1\}$，有转移方程：

$$dp_{i,j} \leftarrow dp_{i',j'} + \sum_{k=i'}^{i-1} [a_k \le a'_i - j'] b_k - m \times \max((a_i - j) - (a_{i'} - j'), 0) \tag{1}$$

直接暴力转移的时间复杂度为 $O(n^2)$。

正解

动态维护每个状态转移到当前状态时对应的权值。为方便维护，令状态 $dp_{i,j}$ 对应的下标为 $a_i - j$。

令维护的权值序列为 w。从 $i-1$ 扫描到 i 时只需支持：w 区间加，求 $\max(w_i)$，求 $\max(w_i + m \times i)$。使用线段树维护即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

完结撒花