

皮鞋的多项式 解题报告

1 题目大意

给定一颗 n 个节点的有根树，树上每个节点都有一个次数为 k_i 的多项式。定义 $F(x)$ 为 x 子树内所有节点上多项式的乘积。

给你 q 个询问，每个询问形如 $x l r$ ，你需要输出 $(\sum_{i=l}^r [x^i] F(x)) \bmod 998244353$ 的值，强制在线。

2 数据范围

对于 100% 的数据，满足

$1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq k_i, \sum k_i \leq 10^5, 1 \leq q \leq 2 \times 10^5, 1 \leq u, v, x \leq n, 0 \leq l \leq r \leq \sum k_i, 0 \leq a_{i,j} \leq 998244352$

。

子任务编号	特殊性质	分值
1	$n, \sum k_i \leq 2000$	7
2	$\sum k_i = 0$	3
3	$x = 1$	20
4	$n, q \leq 5 \times 10^4, k_i = 1$	20
5	$n, q, \sum k_i \leq 2 \times 10^4$	20
6	无特殊限制	30

时间限制：3s。

空间限制：1024 MB。

3 解题过程

3.1 算法一

我会暴力！

直接暴力乘起来，预处理前缀和即可。

暴力乘的时间复杂度等同于树上背包，故总时间为 $O(n^2 + q)$ 。

可以通过 Subtask 1, 2。

3.2 算法二

当只询问根节点的信息时，只需要将所有多项式乘起来，用合并果子的方法合并即可。

可以证明时间复杂度为 $O(n \log^2 n + q)$ ，可以通过 Subtask 3。

3.3 算法三

认为 $\sum k_i$ 和 q 与 n 同阶。

设立阈值 B 。对于树上的每个点维护一个多项式二元组 (F_i, G_i) ，满足 i 子树内所有多项式的乘积 $= F_i \times G_i$ ，并且 G_i 的项数 $\leq B$ 。

合并时 F 暴力乘， G 暴力乘。如果 G 的项数 $> B$ ，那么将其乘到 F 中。

容易证明，与 F 有关的乘法只会进行 $O(\frac{n}{B})$ 次（注意两个 F 相乘时可能其中一个为 1，此时不需要进行乘法）。故而本质不同的 F 只有 $O(\frac{n}{B})$ 个，所以只需要把所有 F 和每个节点的 G 存下来即可。

询问时可以 $O(|G_i|)$ 查询。将 B 设为 $\sqrt{n \log n}$ ，可以得到复杂度为 $O(n\sqrt{n \log n})$ 。

实现时 F 的乘法使用 ntt ， G 的乘法使用平方乘法（根据树上背包的理论时间复杂度不变），阈值设大点，常数是不大的。

这似乎启发了一类合并两个集合需要 $\text{poly}(\max(|A|, |B|))$ 的时间来维护信息，但询问并的信息只需要 $\text{poly}(\min(|A|, |B|))$ 的时间的问题（但是并没有什么用，而且目前我只想到了多项式乘法有这个性质）。

参考资料

与集训队宋浩然和张力玺同学的讨论。