《熟练》解题报告

四川省成都市第七中学 宋浩然

1 题目描述

给定大小为 n 的树和 m 条树上的简单路径。你需要给每条路径分配一个颜色 c_i，使得任意两条颜色相同的路径，不经过相同的点。

求最少需要几种颜色，并构造方案。

2 输入格式

本题有多组测试数据。

输入的第一行包含一个整数 c，表示子任务编号。$c = 0$ 表示该测试点为样例。

输入的第二行包含一个整数 t，表示测试数据组数。

接下来依次输入每组测试数据，对于每组测试数据：

输入的第一行包含两个正整数 n, m。

接下来 $n-1$ 行，第 i 行包含两个正整数 u_i, v_i，表示树的第 i 条边为 (u_i, v_i)。

接下来 m 行，第 i 行包含两个正整数 a_i, b_i，表示第 i 条路径为 a_i 到 b_i 的简单路径。

3 输出格式

对于每组测试数据：

第一行包含一个正整数 k，表示最少需要几种颜色。

第二行包含 m 个正整数，第 i 个数为第 i 条链的颜色 c_i，你需要保证 $1 \le c_i \le k$。

如果你输出的 k 正确，c_i 序列符合格式但不符合题目要求，可以获得该测试点 15% 的分数。

4 数据范围

对于所有数据，$1 \le t \le 10^5, 1 \le n, m, \sum n, \sum m \le 5 \times 10^5, 1 \le u_i, v_i, a_i, b_i \le n$。

- subtask1 (3 pts)：$n, m \le 5$。
- subtask2 (14 pts)：$m \le 5$。
- subtask3 (9 pts)：$\forall 1 \le i < n, u_i = i, v_i = i + 1$。
- subtask4 (20 pts)：$n, m \le 1000, \sum n, \sum m \le 5000$。
- subtask5 (22 pts)：$\sum n, \sum m \le 10^5$。
- subtask6 (32 pts)：无特殊限制。

5 算法 1

状压 DP ，记 f_S 为集合 S 需要几种颜色，枚举子集转移。容易构造方案。

可以通过子任务 1，根据实现可以通过子任务 2。

6 算法 2

k 有一个显然的下界：每个点被经过次数的最大值。

猜测 k 可以取到这个值。发现能够获得每个子任务 15% 的分数，结论正确。

考虑证明该结论：令所有被经过次数为 k 的点为关键点，如果能选出若干两两不交的路径，经过所有的关键点，那么重复进行 k 次该过程即可构造出方案。

钦定任意一个点为根，对于所有不存在关键点祖先的关键点 u，选择一条 $\mathrm{lca}(a_i, b_i) = u$ 的路径。发现一定存在满足条件的路径，否则所有经过点 u 的路径均经过了 u 的父亲结点，那么 u 的父亲结点也是关键点，矛盾。

递归到未被路径经过的子树中继续处理，显然所有路径两两不交。

7 算法 3

直接算法 2 中的构造。单组数据时间复杂度 $O(nm)$，可以通过子任务 4。

8 算法 4

考虑递归构造的过程，每次是在找一个 dfs 序最小的关键点。只需要使用树剖加线段树或全局平衡二叉树维护最大值及其位置。单组数据能够做到 $O((n+m)\log^2 n)$ 或 $O((n+m)\log n)$ 的时间复杂度。可以通过此题。

9 总结

本题是原创题，难度不大，但题意非常简洁自然。

子任务 5 是对应到本人初始想到的一些不够优秀的构造方式，维护方法较为复杂，时间复杂度为 $O((n+m)\log^2 n)$，但常数很大。

如果题中的给定的 m 条路径替换为 m 个连通块，仍能套用类似的做法。于是本题还有以下的版本：

- 版本 a：给定的图不是树，但保证所有的环都是三元环，给定 m 条路径。构造方案。
- 版本 b：在版本 a 的基础上，不构造方案，但是会动态修改路径集合并询问 k 的值。

本题原本准备出成版本 b，但经过和周康阳同学的讨论，本人意识到该问题较为套路，于是将此题改为现在的版本。

感谢鲜博宇同学验题。