题目大意

注意，本题对 mex 的定义与一般的定义不同。

对于可重集 S 定义 $\mathrm{mex}(S)$ 表示最小的 **正整数** x 满足 $x \notin S$。

对于给定的数组 $a_1, a_2, \dots, a_n$，保证 $-1 \le a_i \le n$，使用以下的方式生成数组 $b_1, b_2, \dots, b_n$：

$$b_i = \begin{cases} a_i & a_i \neq 0 \\ \mathrm{mex}(\{b_1, b_2, \dots, b_{i-1}\}) & a_i = 0 \end{cases}$$

现在给定长度为 n 的数组 $a_1, a_2, \dots, a_n$，**保证初始时 $a_i \in \{-1, 0\}$ 且数组 a 不全为** 0。

给定 q 次操作，每次操作给定三个整数 x, k, y，保证 $1 \le x, y \le n$，$a_x \neq 0$，$-1 \le k \le n$ 且 $k \neq 0$。表示先将 a_x 修改为 k，然后你需要求出使用当前的数组 a 所生成的数组 b 中 b_y 的值。

注意，任意时刻为 0 的 a_i 不会被修改，不为 0 的 a_i 不会被修改为 0。

数据范围

对于 100% 的数据，保证 $1 \le n, q \le 10^6$，$a_i \in \{-1, 0\}$，$1 \le x, y \le n$，$a_x \neq 0$，$-1 \le k \le n$ 且 $k \neq 0$。保证数组 a 不全为 0。

子任务编号	特殊性质	分值
1	$n, q \le 10^4$	10
2	初始时序列 a 单调不降	10
3	$k \le 100$	10
4	序列 a 中 0 的数量 ≤ 100	10
5	每次修改前 $a_x = -1$	30
6	无	30

解题过程

以下认为 n, q 同阶。

做法 1

考虑 $O(n)$ 地由 a 生成出 b。

按照 $i=1,2,\dots,n$ 遍历数组 a，同时维护 vis_i 表示 i 是否已经在 b 中出现过。当 $a_i \neq 0$ 时，$vis_{a_i} \leftarrow$ `true`；当 $a_i = 0$ 时，b_i 初始设置为上一个 $a_p = 0$ 位置的 b_p，然后使 $b_i \leftarrow b_i + 1$ 直到 $vis_{b_i} =$ `false`。

时间复杂度 $O(n^2)$，可以通过子任务 1。

做法 2

考虑解决子任务 2。

注意到存在集合 $S \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ 满足对于 a 中的第 i 个 $a_x = 0$，满足 b_x 等于 S 中的第 i 小的数。

此时 $x \in S$ 等价于不存在 $a_i = x$。

使用树状数组或平衡树等数据结构维护插入、删除、求 k 小值即可。

时间复杂度 $O(n \log n)$，可以通过子任务 2。

做法 3

考虑解决子任务 5。

首先此时原问题等价于在初始全为 0 的序列 a 中任意插入 > 0 的数。

不难注意到，满足做法 2 中所述性质的集合 S 在一般的情况下也存在，这启发我们动态的维护 S 而不是数组 b。

以下我们假设 a 中 > 0 的数互不相同，若存在相同仅保留第一个即可。由此，定义 pos_i 表示 i 出现的位置。

在任何时刻，对于 $a_i > 0$，$a_i \notin S$ 等价于 i 之前最近的 $a_p = 0$ 的 $b_p < a_i$。因此，只要维护了集合 S，在一次 $a_x \leftarrow k$ 的修改操作中，可以轻易得到是否需要将 k 从 S 中删除。

但在一次修改操作中，可能会引起需要往 S 中加入一些数（由将 k 从 S 中删除所引起的 b 的改变）。对于 $j \notin S$ 定义 $f_j = \sum\limits_{x \in S} [x \le j] - c_{pos_j}$，其中 c_i 表示 a 数组中 a_i 之前有多少个 0。容易发现 $j \notin S$ 时 $f_j \ge 0$；而一旦出现 $f_j < 0$ 则需要将 j 加入到 S 中。

那么每次修改对 f_j 的修改即为从 k 开始的一段前缀减 1，直到出现 $f_j=0$ 为止。

使用线段树维护 f_j，时间复杂度 $O(n\log n)$，可以通过子任务 $1,5$。

做法 4

首先原问题等价于在初始全为 0 的序列 a 中任意插入或删除 >0 的数。

注意到在做法 3 中，每次操作对 S 的改变都是 $O(1)$ 的，这启发我们使用类似的方式处理删除操作。

对称的，对于 $j\in S$ 定义 $g_j=c_{pos_j}-\sum\limits_{x\in S}[x\le j]$。此时也有 $j\in S$ 时 $g_j\ge 0$；而一旦出现 $g_j<0$ 则需要将 j 从 S 中删除。

修改的形式也是类似的。但值得注意的是，在对 f_j（或 g_j） 执行从 k 开始的一段前缀减 1 操作时，也需要在 g_j（或 f_j）中对这一段区间进行加 1 的操作。

使用线段树维护 f_j,g_j，时间复杂度 $O(n\log n)$，可以通过所有子任务。

参考资料

无

感谢蒋承佑同学、陈哲章同学、欧阳达晟同学在命题过程中与本人的讨论与交流。