# 《树数叔术》解题报告

## 题目大意

给定 $N,V$，求 $\sum\limits_{T是一棵N个点的有标号无根树} f(T)$ 对 $P$ 取模后的结果。

对于一棵 $N$ 个点的有标号无根树 $T$，定义 $f(T)$ 为合法的给每个节点赋权的方案数，令 $i$ 号点的权值 $a_i$，定义一个赋权方案合法，当且仅当对于所有树上的所有非空连通块 $S$，都满足：$\text{mex}(\{a_i|i\in S\})=\min(\{a_i|i\notin S\})$。

此处定义 $\text{mex}(E)$ 为 $E$ 集合内没出现过的最小非负整数，$\min(E)$ 为 $E$ 集合内元素的最小值。

特别的，定义$\text{mex}(\emptyset)=0,\min(\emptyset)=V+1$。

## 数据范围

对于全部数据，满足：

$1\le N\le 150,1\le V\le 10^9,3\le P\le 1.01\times 10^9$。

| 子任务 | 分值 | $N\le$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 |
| 2 | 15 | 6 |
| 3 | 30 | 50 |
| 4 | 50 | 150 |

## 解题过程

### Subtask 1

考虑取 $S=T$，注意到可以推出整棵树必须有 $0-V$，所以若 $V\ge N$ 则输出 $0$，否则直接爆搜 $check$，期望得分 $5$ 分。

### Subtask 2

注意到由于 $0-V$ 均出现，则可知 $\forall S,\text{mex}(\{a_i|i\in S\})\ge\min(\{a_i|i\notin S\})$。那么只需要考虑是否 $\exists S,\text{mex}(\{a_i|i\in S\})>\min(\{a_i|i\notin S\})$。枚举 $\min$ 的位置 $y$，则 $S$ 一定是将 $y$ 去掉后的某个联通块的子集，假设此联通块为 $S_1$，可知 $\text{mex}(\{a_i|i\in S_1\})\ge\text{mex}(\{a_i|i\in S\})$。因此若 $S$ 不满足条件，则 $S_1$ 也不满足条件，因此需要被 $check$ 的 $S$ 本质只有 $O(N)$ 个，配合爆搜，期望得分 $20$ 分。

### Subtask 3

先给出一个较为直接的结论：

对于 $\forall i\in\{0,1,...,V\}$，满足由权值 $\le i$ 的点构成的虚树上，如若不是权值 $i$ 只出现一次，那么虚树上不能有度数为 $1$ 的点权值为 $i$。

考虑结论怎么证明。延续之前的想法，我们注意到 $a_y = \min(\{a_j | j \notin S_1\})$ ，而又因为 $0,1,\dots V$ 均出现至少一次，故我们可知 $S_1$ 中的点权必然存在 $0,1,\dots,a_y-1$，那么 $\mathrm{mex}(\{a_i | i \in S_1\}) > a_y$ 是否满足只与是否 $\exists j \in S_1, a_j = a_y$ 有关，这完全等价于上述那个结论。

考虑把所有节点按照点权从小到大的顺序依次插入一棵虚树 $T_1$，观察真正有用的信息，可以设计出 $dp$ 状态 $f_{i,j,k}$ ，表示已经将 $\{x | 0 \le a_x \le i\}$ 插入虚树 $T_1$，$|\{x|0 \le a_x \le i\}| = j$，而虚树 $T_1$ 中有 $k$ 个未被标号的虚点时的方案数对 $P$ 取模的结果。每次新加入 $\{x | a_x = i+1\}$ 时，进行以下讨论以转移：

1. 若 $|\{x|a_x = i+1\}| = 1$，则我们需要为该节点选择相对编号，再讨论四种情况：找个虚点填这个编号、找个点挂上去、找个边挂上去并新增一个虚点以及直接插入一条边内。这四种转移额外系数都较简单，分别是虚点数、虚树点数、虚树边数与虚树边数，值得注意的是第一种和第三种会使未被标号的虚点个数发生变化。
2. 若 $|\{x|a_x = i+1\}| > 1$，则当前节点只能选择填入之前未被标号的虚点或塞入之前的边中。考虑枚举 $c$ 个塞入边中， $c_1$ 个填入之前未被标号的虚点，则转移系数为 $\binom{k}{c1} \times \binom{j+c+c1}{c+c1} \times \binom{c+c1}{c1} \times c1! \times \prod_{x=0}^{x<c}(j+k+x-1)$。

该算法复杂度 $O(V \times N^4)$，期望得分 50 分。

### Subtask 4

注意到可以设计中转状态 $g_{i,j,k}$ 表示当前已经将 $\{x|0 \le a_x \le i\}$ 以及上述 2. 中塞入边中的 $c$ 个点插入 $T_1$，其中 $|\{x|0 \le a_x \le i\}| + c = j$，而虚树 $T_1$ 中还有 $k$ 个未被标号的虚点。

注意到从 $f_i$ 到 $g_i$ 的转移需要枚举 $c$，而从 $g_i$ 到 $f_{i+1}$ 需要枚举 $c1$，因此总时间复杂度 $O(V \times N^3)$，常数极小，期望得分 $100$ 分。

## 参考资料

无。