

# 《长野原龙势流星群》命题报告

孙培轩

2024 年 10 月 8 日

## 目录

1	题目大意	2
2	数据范围	2
3	解题过程	3
3.1	Subtask 1 的解法 . . . . .	3
3.2	Subtask 2 的解法 . . . . .	3
3.3	满分做法 . . . . .	3
4	参考资料	4

## 1 题目大意

给定一棵  $n$  个节点的有根树，1 号节点是根节点，每个点有点权  $w_i$ 。你需要对每个点  $u$  找到一个以  $u$  为根的连通块，并最大化这个连通块内所有点的点权的平均值。

对每个点  $u$  输出这个最大的平均值。答案保留 5 位小数输出。

## 2 数据范围

对于所有数据， $1 \leq n \leq 2 \times 10^5, 1 \leq w_i \leq 10^9$ 。

- Subtask 1 (10 分):  $1 \leq n \leq 2000$ 。
- Subtask 2 (10 分): 对每个  $2 \leq i \leq n$ ,  $i$  的父亲节点是  $\lfloor i/2 \rfloor$  号节点。
- Subtask 3 (40 分):  $1 \leq n \leq 50000$ 。
- Subtask 4 (40 分): 无特殊限制。

## 3 解题过程

### 3.1 Subtask 1 的解法

通过树形背包 DP，可以在  $O(n^2)$  时间内算出  $f(u, j)$  表示以  $u$  为根的大小为  $j$  的连通块内点权和的最大值。

算出所有的  $f$  后，点  $u$  的答案就是  $\min_j \frac{f(u, j)}{j}$ 。

时间复杂度： $O(n^2)$ 。

### 3.2 Subtask 2 的解法

考虑对一棵树怎么计算根节点的答案，二分答案  $mid$  后将每个点的点权减去  $mid$ ，则只需要判断是否存在一个包含根节点的连通块，其点权和  $\geq 0$ 。

通过一遍树形 DP 求出  $f_u$  表示此时以  $u$  为根的连通块内点权和的最大值后，判断  $f_1 \geq 0$  是否成立即可。

这样，对于一棵  $n$  个点的树，我们可以在  $O(n \log V)$  的时间复杂度内计算出根节点的答案。

对于 Subtask 2，我们考虑对每个节点的子树都执行一遍上述算法，由于此时树的高度只有  $O(\log n)$  级别，树上所有点的子树大小之和只有  $O(n \log n)$  级别。

时间复杂度： $O(n \log n \log V)$ 。

### 3.3 满分做法

在 Subtask 1 的解法中，注意到我们只需要关注  $\frac{f(u, j)}{j}$  的最大值。

把一个  $f(u, j)$  看作平面上的点  $(j, f(u, j))$ ，我们有以下结论：对平面上的若干个点  $(x_i, y_i)$ ，这些点和原点连线的斜率最大值只会在它们的上凸壳中取到。证明只需要考虑三个点如果形成下凸，那么两边至少会有一个点比中间的那个点优。如此去除无用的点，最后只剩下上凸壳中的点。

树上背包合并的过程可以看做把两个点集做闵可夫斯基和，于是我们使用一棵平衡树来维护上凸壳中的边，合并时采用启发式合并即可。

计算答案时，我们在平衡树上二分，即可找到斜率最大的一个点的位置。

时间复杂度： $O(n \log^2 n)$ 。

## 4 参考资料

[OI Wiki - 凸包](#)