

Désive 命题报告

陈诺

杭州学军中学教育集团文渊中学

October 4th, 2024

Désive

- 定义一个序列的 xormex 为全部 xor 同一个非负整数的 mex 的最大值。
- q 次求一个区间的 xormex 和其所有子区间的 xormex 的和。
- xor : exclusive or, 即异或运算。
- mex : minimum excluded value, 即最小没有出现过的非负整数。

数据范围

记序列长度为 $N = 2^n$ ，记询问个数为 Q ，题目保证 $a_i \in [0, N)$ 。

数据范围中 $o = 1$ 代表只询问单个区间的 xormex。

- Subtask 1 (7 pts): $n \leq 6, m \leq 10^3$ 。
- Subtask 2 (15 pts): $n \leq 12, m \leq 5 \times 10^4$ 。
- Subtask 3 (13 pts): $n \leq 16, m \leq 10^5, o = 1$ 。
- Subtask 4 (16 pts): $n \leq 17, m \leq 5 \times 10^5, o = 1$ 。
- Subtask 5 (10 pts): $o = 1$ 。
- Subtask 6 (12 pts): $n \leq 17, m \leq 5 \times 10^5, a_i$ 两两不同。
- Subtask 7 (5 pts): a_i 两两不同。
- Subtask 8 (14 pts): $n \leq 17, m \leq 5 \times 10^5$ 。
- Subtask 9 (8 pts): 无特殊限制。

时间限制为 5 秒，空间限制为 512 MB。

单序列

- 考虑对于一个序列怎么快速求答案，即 $o = 1$ 。
- 建一个 Trie，在 Trie 上 DP 即可。
- 每次可以选择要不要把子树换一换，如果换完左边没满就递归左边，否则递归右边。
- 显然如果有一个子树是满的答案是另一侧子树的答案加 2^k ，否则答案是两个子树答案的 \max 。
- 对于单次询问可以做到 $O(n \log n)$ ，总时间复杂度 $O(nm \log n)$ 。
- 显然这样可以支持插入和删除，使用莫队算法可以做到 $O(n\sqrt{m} \log n)$ 。
- 可以通过 Subtask 1~3，共 35 分。

排列

- 接下来研究 a 是排列的解法。
- 仍然尝试离线，考虑扫右端点，维护所有左端点的答案。
- 对 Trie 上的每个叶子算贡献，假设这个叶子作为 DP 过程中最优的方案，考虑其 xormex 值。
- 这个值等于其所有祖先的兄弟中，所有满子树的 size 和。
- 对于右端点扫描线维护所有左端点的答案，每次考虑 Trie 上被新元素填满的子树。
- 这些子树会更新其兄弟子树内的所有叶子的答案。
- 其大小总和是 $O(2^n n)$ 的。
- 所以我们可以暴力枚举其子树内的所有叶子，求出其对答案的 n 段贡献。由于每段贡献都是单调的，因此所有贡献的 max 也是单调的。

小优化

- 注意到区间子区间求和问题也可以使用扫描线，维护左端点的答案总和，在这个做法下两种询问的维护方法是类似的。
- 所有贡献都形如左端点 $\leq x$ 的点的答案和 y 取 \max ，可以转化为前缀 \max 区间历史和问题，可以使用线段树解决。
- 一共有 $O(2^n n^2)$ 次线段树操作，时间复杂度 $O(2^n n^3 + nm)$ ，并且可以回答 $o = 2$ 。
- 可以通过 Subtask 6，结合单序列算法共 47 分。
- 一个不难想到的优化是直接对子树内 $2^{n'}$ 种可能的答案全部求出最大左端点，再和子树外的 n 个决策归并一下，这样时间复杂度从 $2^{n'} \cdot n$ 变成了 $2^{n'} + n$ ，然后这个 n 还是每次操作全局共享的。
- 于是这样就只有 $O(2^n n)$ 次线段树操作，时间复杂度 $O(2^n n^2 + nm)$ 。
- 可以通过 Subtask 6~7，结合单序列算法共 52 分。

正解

- 最后，我们来研究 a 不是排列的情况。
- 对于 a 是排列的情况，一棵子树只会被填满一次。
- 如果 a 不是排列，可能一棵大子树会被反复更新，此时时间复杂度就会退化到 $O(2^{2n})$ 以上。
- 但是，我们实质上只需要关心用上了这个子树，且这个子树的更新会影响答案的决策。
- 问题的实质是，我们对于目标子树所有介于原子树 \max 更改前后的值 $[v, v']$ 记录答案即可。
- 对于原树的每棵子树维护一个 Trie，支持插入结点和删除最小结点，查询 xormex ，单次操作 $O(n)$ 。
- 扫描线一次移动指针会在 $O(n)$ 棵树上进行插入，删除的时间复杂度显然不会高于插入，因此我们在 $O(2^n n^2)$ 的时间内找到了 $O(2^n n)$ 个最优的区间。
- 总时间复杂度仍是 $O(2^n n^2 + nm)$ ，与排列版本相同，空间复杂度为 $O(n2^n)$ 。
- 如果选手只维护单区间查询可以通过 Subtask 3~5，结合单序列算法共 61 分。
- 实现历史和线段树后可以通过所有 Subtask，获得满分。

参考资料

- 改编自我出过的一道题目 Haitang and XOR Mex。
- <https://ac.nowcoder.com/acm/contest/81603/B>
- 可能需要付费报名参加比赛才能查看题面。
- 感谢周康阳同学在本题出题过程中的帮助。
- 感谢时庆钰老师对本文的指导建议。