《无限地狱》命题报告

福建省福州第一中学 陈旭磊

题目大意

将 $1 \sim n$ 的所有整数划分成三个集合，要求任意两个属于不同集合的元素之和不在剩下的那个集合之内。集合之间是无序的。

求方案数，对 998244353 取模。

数据范围

$\text{Subtask 1}(4\%): n \leq 10$。

$\text{Subtask 2}(13\%): n \leq 40$。

$\text{Subtask 3}(17\%): n \leq 3000$。

$\text{Subtask 4}(21\%): n \leq 10^6$。

$\text{Subtask 5}(22\%): n \leq 10^9$。

$\text{Subtask 6}(23\%): n \leq 2 \times 10^{10}$。

题解

算法 1.1

暴力枚举集合划分，并判断是否满足题意。

朴素实现复杂度为 $O(3^n n^2)$，可以通过子任务 1，期望得分 4 分。

算法 1.2

对暴力搜索进行剪枝，如果已经不满足题意就直接返回，不继续搜索。

此时代码速度没有质的改变，原因是若允许含空集，答案相当大，而这部分答案为 2^{n-1}。

而对于三个集合都非空的情况，其实方案数是不多的。考虑先钦定三个集合里的某个数，再结合剪枝进行搜索。

可以做到较快的指数级复杂度，可以通过子任务 2，期望得分 17 分。

算法 2.1

由于指数级复杂度已无法满足我们的需求，于是尝试找出若三个集合非空，他们所拥有的性质。

不妨设三个集合按照最小元素的值升序排序后依次为 A, B, C。设 $a_i(1 \le i \le |A|)$ 为 A 中元素升序排序后的第 i 个元素。同理于 B, C。设 $g = \gcd(c_1, c_2, \dots, c_{|C|})$。

引理 1

对于 $1 \le i, j \le |C|$，若 $x \not\equiv 0 \pmod g$ 且 $x \in A$，有 $x + (c_j - c_i) \in A$（如果在值域内）。同理于 B。

证明：

若 $x < c_i$，有 $c_i - x \in A$，又 $c_j - (c_i - x) \in A$。

若 $x > c_i$，有 $x - c_i \in A$，又 $x - c_i + c_j \in A$。

引理 2

对于 $a + b \le n$ 且 g 整除 a 与 b，若 $x \not\equiv 0 \pmod g$ 且 $x \in A$，假设对于 $\forall y \equiv x \pmod a$ 与 $y \equiv x \pmod b$，有 $y \in A$。那么 $\forall y \equiv x \pmod{\gcd(a, b)}$，有 $y \in A$。同理于 B。

证明：

考虑如下的一个构造过程。若 $x > b$，将其变为 $x - b$，反之变为 $x + a$。由于 $a + b \le n$，这是一定可以操作的。

这相当与在 $\bmod b$ 意义下，合并 x 与 $x+a$ 的两个等价类。由裴蜀定理可知，在 $\bmod \gcd(a,b)$ 的意义下，同一等价类中的两个数在 A 中的存在性是一致的。

定理 1

对于 $x \not\equiv 0 \pmod g$ 且 $x \in A$，则 $\forall y \equiv x \pmod g$，有 $y \in A$。同理于 B。

证明：

使用数学归纳法。

对于 c_1，$\forall y \equiv x \pmod{c_1}$ 显然 $\in A$。

对于 i，设 $g' = \gcd(c_1, c_2, \ldots, c_i)$，假设若 $\forall y \equiv x \pmod{g'}$，有 $y \in A$。

设 $d = c_{i+1} - c_i$，由引理 1 可知， 对于 $\forall y \equiv x \pmod d$ ，有 $y \in A$。

由于 $g' + d \leq n$，由引理 2 可知，对于 $\forall y \equiv x \pmod{\gcd(g', d)}$ ，有 $y \in A$。

而 $\gcd(g', d) = \gcd(c_1, c_2, \ldots, c_{i+1})$，于是我们从 i 成立得到了 $i+1$ 成立。

推论 1

对于任意 $1 \leq i < |C|$，若 $x \not\equiv 0 \pmod{\gcd(c_1, c_2, \ldots, c_i)}$ 且 $x \in A$，则对于 $\forall y \equiv x \pmod{\gcd(c_1, c_2, \ldots, c_i)}$，有 $y \in A(1 \leq y < c_{i+1})$。同理于 B。

证明：

若一个集合没有出现矛盾，则他的子集也不会出现矛盾。

取出所有 $< c_{i+1}$ 的数，要求这些数之间没有矛盾，于是这便是一个可以应用定理 1 的子问题。

定理 2

有 $g \neq 1$ 恒成立。

证明：

仍然考虑定理 1 证明中的归纳过程。

显然有 $c_1 > 1$。尝试证明若对于 i，有 $g' > 1$，则 $\gcd(g', c_{i+1}) > 1$。

使用反证法，假设 $g' > 1$ 且 $\gcd(g', c_{i+1}) = 1$。下述过程若无特殊说明，均默认值域 $< c_{i+1}$。

若对于 $\forall x \in B$，有 $x \equiv 0 \pmod{g'}$ 成立。则 $\forall x \not\equiv 0 \pmod{g'}$，有 $x \in A$。

由推论 1 知 $d \pm kg' \in A$，同时若 $c_{i+1} - (d \pm kg') \notin C$，则其属于 A。

又 $c_{i+1} - (d \pm kg') = c_i \pm kg'$，故 A, C 可以取遍所有满足 $x < c_{i+1}$ 且 $x \equiv 0 \pmod{g'}$ 的 x。于是 $b_1 > c_{i+1}$，这与 B, C 的顺序矛盾。

另一方面，若 $\exists x \in B$，使得 $x \not\equiv 0 \pmod{g'}$，则对 $\forall y \equiv x \pmod{g'}$ 与 $y \equiv -x \pmod{g'}$，都有 $y \in B$。

又对 $\forall y \equiv -(c_{i+1} - x) \pmod{g'}$ 与 $y \equiv c_{i+1} - (-x) \pmod{g'}$，都有 $y \in B$（若 $y \not\equiv 0 \pmod{g'}$）。

这相当于在模 g' 意义下，若 x 与 $x + c_{i+1}$ 均 $\not\equiv 0$，则他们都属于 B。

因为 $\gcd(g', c_{i+1}) = 1$，于是这可以取完模 g' 意义下的除了 0 以外的所有等价类。

又由于 $1 \in A$，故出现矛盾。

定理 3

有 $\gcd(b_1, b_2, \ldots, b_{|B|})$ 整除 g。

证明：

若对 $\forall x \in B$，有 $x \equiv 0 \pmod{g}$，则由于 B, C 间的大小关系，有 $g \in B$。

另一方面，若存在 $x < g$，使得 $x \in B$，则有 $g - x \in B$，而 $\gcd(x, g-x) = \gcd(x, g)$。

通过以上结论，我们可以知道，对于 $\forall x \not\equiv 0 \pmod g$，唯一的限制是 $\forall y \equiv x \pmod g$ 与 $y \equiv -x \pmod g$ 需要和他在一个集合内。

对于剩余部分，限制是由他们内部带来的。由于 $g > 1$，我们可以先将其除以 g 再考虑。发现这类似一个规模更小的子问题， 但限制会有所不同。如原先的 C 内要互素，可以为空集等。

现在，我们已经发现了足够多的这个结构所具有的性质，尝试设计 dp 来解决这个问题。

设 $f(n)$ 表示总方案数。考虑分类讨论计算贡献。

当 B 中所有数都为 g 的倍数时，有 $g \in B$，且对 $\forall x \not\equiv 0 \pmod g$，都有 $x \in A$。‘

考虑保留所有 g 的倍数，并将他们除以 g，得到 A', B', C'。

此时 C' 内的 gcd 应为 1。 A' 可为空集，或者满足顺序 $B'_1 < C'_1 < A'_1$。

设 $h(n)$ 表示这种情况下的方案数，这一部分对 $f(n)$ 的贡献为 $\sum_{d=2}^{n} h(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$。

考虑 $h(n)$ 的转移式，使用莫比乌斯反演消去 $\gcd = 1$ 的限制。

对于 A' 为空集的情况，唯一的要求是 $1 \in B'$。贡献为
$-2^{n-1} + \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \times (2^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} - 1)$。

对于 A' 非空的情况，根据定理 3，此时非 d 的倍数的数一定在 B' 中，于是可以将所有数先除以 d 再判断合法性。需要考虑 B' 中不含 d 倍数的情况。

这一部分的贡献为 $-2f(n) - (2^{n-1} - 1) + \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \times [3f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor) + (2^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor - 1} - 1)]$。

这两种情况求和号外面的部分均为 $d = 1$ 时的 corner case。

综上，有 $h(n) = -2f(n) - (2^{n} - 1) + \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \times [3f(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor) + 3 \times 2^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor - 1} - 2]$。

当 B 中存在不为 g 倍数的数时，此时 A', B' 均可为空集。

设 $g(n)$ 为这部分的方案数，对 $f(n)$ 的贡献为 $\sum_{d=2}^{n} (2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1} - 1) g(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$。

转移推导和 $h(n)$ 是类似的。对于 A', B' 均为空的情况，方案数为 1。

对于 A', B' 中存在一个空集的情况，方案数为 $-2 + 2\sum_{d=1}^{n}\mu(d) \times (2^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} - 1)$。

对于 A', B' 均非空的情况，方案数为
$-2f(n) - (2^n - 2) + 2\sum_{d=1}^{n}\mu(d) \times [3f(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor) + (2^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor - 1} - 1)]$。

综上，有 $g(n) = -2f(n) - (2^n - 1) + 2\sum_{d=1}^{n}\mu(d) \times [3f(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor) + 3 \times 2^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor - 1} - 2]$。

暴力转移，时间复杂度 $O(n^2)$。可以通过子任务 3，期望得分 34 分。

算法 2.2

注意到对于 $s(n) = \sum_{i=1}^{n}\mu(i)$，我们有经典转移式 $s(n) = 1 - \sum_{d=2}^{n} s(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$。

于是我们事实上可以使用整除分块优化转移，所有转移对的数量是 $O(n^{\frac{3}{4}})$ 的。

需要对所有状态预处理 2 的次幂等需要的系数，不然复杂度可能会多一个 $\log n$。

时间复杂度 $O(n^{\frac{3}{4}})$，可以通过子任务 5，期望得分 77 分。

算法 2.3

使用杜教筛的思想，预处理前若干项 dp 值。那么现在的问题是如何快速求出 $1 \sim n$ 的 dp 值。

发现我们可以对差分进行 dp，这样除法下取整就变为了整除，可以 $O(n \ln n)$ 的求出。

总时间复杂度 $O(n^{\frac{2}{3}} \ln^{\frac{1}{3}} n)$，可以通过子任务 6，期望得分 100 分。

如果只使用了快速求前 n 项的算法而没有使用整除分块加速的话，可以通过子任务 4。

参考资料

题目背景经作者授权，节选并改编自 www.bilibili.com/read/cv5014463。

致谢

感谢中国计算机学会提供本次交流的平台。

感谢吴俊书学长提供本题的 idea。

感谢厦门双十中学李静榕同学为本题验题。