环上排序信息最优分割 解题报告

1. 简要题意

给定一些序列排成环，要求在每个序列上切一刀，相邻两个序列的后半部分和前半部分拼起来形成新的序列，最小化所有新序列的代价和。代价定义为加入 0 和 2×10^6 后排序后相邻两项之差的平方的和。

Subtask1（10pts）：$\sum m\le 100$;

Subtask2（20pts）：$\sum m\le 1000$;

Subtask3（30pts）：$\sum m\le 5\times 10^4$;

Subtask4（40pts）：$\sum m\le 2\times 10^5$;

2. 解题过程

用 M 表示 $\sum m$。

算法 1

使用动态规划求答案。

先枚举第一段的分界点，设 $dp(i,j)$ 表示分了前 i 段，第 i 段的分界点是 j 的最小代价，转移时枚举上一段的分界点，总复杂度 $O(M^3)$，期望得分 10 分。

算法 2

用转移函数的性质优化 dp 转移。

设 $f(l,r)$ 表示从分界点 l 到分界点 r 的一段区间的代价。考虑 f 关于 r 的差分，即 $f(x,r+1)-f(x,r)$ 的值，它等于向有序数列中某相邻两数之间插入一个数产生的代价，设为 p_i 和 p_{i+1}，而差分的值等于 $(x-p_i)^2+(p_{i+1}-x)^2-(p_{i+1}-p_i)^2$。当 x 的值增加 1 时，相当于删除一个数。若没有删除 p_i 和 p_{i+1}，那么差分的值不变；若删除其中之一，不妨设删除 p_i，那么这个差分的变化量是 $(x-p_{i-1})^2-(x-p_i)^2+(p_{i+1}-p_{i-1})^2-(p_{i+1}-p_i)^2$，整理可知一定 ≤ 0。因此我们的代价函数实际上满足四边形不等式。打表亦可看出这点。

因此可以采用决策单调性分治完成 dp 的转移优化。f 的值不好计算，但如上所述在端点移动的时候 f 的值的变化量是容易计算的，用 `std::set` 一类的有序结构维护即可。而决策单调性分治过程中使用类似莫队的方法指针移动计算贡献不改变复杂度。具体来说，在分治 `solve(ls, rs, lt, rt)` 表示 $[lt,rt]$ 的决策区间是 $[ls,rs]$ 的过程中，我们需要计算出的是 $[ls,rs]$ 中的每个端点到 $[lt,rt]$ 的中点的代价值，这个扫描的距离是区间长度级别，而进出内层分治的过程也不会产生额外的代价，于是总的指针移动量还是一个 $\log M$ 级别。

于是复杂度优化到 $O(M^2\log^2 M)$，期望得分 30 分。

算法 3

枚举起点的时间太浪费了，考虑用环的性质优化。

设对于起点为 x 的最优决策点依次是 $d_{x,1}, d_{x,2}, \ldots, d_{x,n}$，那么一定存在一组最优的 d 使得，对于任意 $x < y$，我们有 $d_{x,i} \le d_{y,i}$。感性理解是，如果把原序列从上往下排好，把决策过程画成折线，那么所有的折线不交。这是因为，假设上式不成立，那么取第一个满足 $d_{x,i} > d_{y,i}$ 的 i，将这个位置及之后所有的决策点对应交换，总代价是一个包含变成相交的形式，一定不劣。

那么一个起点的决策点的范围实际上可以被别的决策点限定，也就是其实可以采用类似的分治思路。

把最短的序列放到开头，对其分治。当计算一个起点的时候，我们在它目前的决策点范围里使用算法 2 的分治求出它的实际决策点，然后它的决策点即可把它两边的起点对应的决策点范围分成相应的两半。这样每个可能的端点会被内层分治计算 $\log M$ 次，总复杂度 $O(M \log^3 M)$，期望得分 60 分。

算法 4

优化指针移动过程。

我们可以用链表维护有序集，这样可以 $O(1)$ 删除但不能快速插入。因此我们用栈存下所有的操作，用撤销代替插入，即可去掉最后的 log 因子。总复杂度 $O(M \log^2 M)$，期望得分 100 分。

3. 总结

本题是一道动态规划题，考察选手对于各种四边形不等式相关的性质和处理方法的了解，定位为简单题。

笔者在出题过程中有与集训队队员李静榕和笔者的同学史家丞的讨论，感谢他们对本题的贡献。