

NOI 2024 Day2 A. 分数

清华大学 江城 任舍予 张艺缤

2024 年 7 月 20 日

问题 (分数)

定义正分数为分子、分母都为正整数的既约分数。

定义完美正分数集合 S 为满足以下五条性质的正分数集合：

- $\frac{1}{2} \in S$;
- 对于 $\frac{1}{2} < x < 2$, $x \notin S$;
- 对于所有 $x \in S$, $\frac{1}{x} \in S$;
- 对于所有 $x \in S$, $x + 2 \in S$ 。
- 对于所有 $x \in S$ 且 $x > 2$, $x - 2 \in S$ 。

求分子不超过 n , 分母不超过 m 的完美正分数个数。

数据范围: $n, m \leq 3 \times 10^7$ 。

- 声明：本题部分分给的比较多，希望大家的做题体验比较好。

- 考虑如何判断 $\frac{p}{q}$ 是否为完美正分数：

- 考虑如何判断 $\frac{p}{q}$ 是否为完美正分数：
- 考虑类比样例解释的做法；

- 考虑如何判断 $\frac{p}{q}$ 是否为完美正分数：
- 考虑类比样例解释的做法；
- 如果大于 2 就 -2 ；如果小于 $\frac{1}{2}$ 就取倒数，不然直接返回不合法。

- 考虑如何判断 $\frac{p}{q}$ 是否为完美正分数：
- 考虑类比样例解释的做法；
- 如果大于 2 就 -2 ；如果小于 $\frac{1}{2}$ 就取倒数，不然直接返回不合法。
- 此操作类似类欧，单个 $O(\log n)$ 。直接暴力， $O(n^2 \log n) \sim O(n^2)$ ，可以通过 50 分。

■ 考虑倒推：

- 考虑倒推：
- 上述做法倒推相当于，每次把 $\frac{1}{x}$ 和 $x + 2$ 加进去。

- 考虑倒推：
- 上述做法倒推相当于，每次把 $\frac{1}{x}$ 和 $x + 2$ 加进去。
- 如果分子或者分母大于 $\max(n, m)$ 就结束。解数较少，如果使用 BFS 加 set 判重可以获得 70 分。

- 考虑倒推：
- 上述做法倒推相当于，每次把 $\frac{1}{x}$ 和 $x + 2$ 加进去。
- 如果分子或者分母大于 $\max(n, m)$ 就结束。解数较少，如果使用 BFS 加 set 判重可以获得 70 分。
- 注意到做法一其实说明了生成方式的唯一性，因此不需要用 set 判重，也可以把 BFS 改为 DFS 来减小空间，可以获得 85 分。
- 对上述 DFS 进行剪枝或者卡常，可以获得 90 ~ 95 分。

- 上述做法相当于每个完美正分数都搜到了一次。
- 考虑能否把一堆正分数一起搜。

- 上述做法相当于每个完美正分数都搜到了一次。
- 考虑能否把一堆正分数一起搜。
- 我们先用连分数的语言重新叙述一下做法。我们先考虑小于 1 的部分。相当于求连分数序列 $\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}} = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ 的个数，其中化简后分子分母不超过 n, m ，并且 a_i 都是偶数。

- 考虑折半。将操作序列理解为 A, B 两种操作，其中 $A(x) = \frac{1}{x+2}, B(x) = \frac{x}{2x+1}$ 。待定阈值 X ，对于一个 A, B 序列，一定存在一个唯一的位置使得分子，分母中第一次有超过 X 的值。我们将这个序列从这个位置拆开。
- 拆开之后，后面的部分还是一个分式线性变换，前面的部分可以看成一个分数。
- 这个分数复合分式线性变换之后还满足分子分母不超过 n, m 是一个半平面数点问题。
- 如果我们认为分子分母不超过 n 的有 $\tilde{O}(n^\lambda)$ 个的话，复杂度为 $\tilde{O}(B^\lambda + (n/B)^\lambda \sqrt{B^\lambda}) = \tilde{O}(n^{2/3\lambda})$ 。

- Bonus: 证明 $\tilde{\lambda} = 1.465 \dots$ 为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^\lambda} = 1$ 的根为上述 λ 的上界, 因此上述正解二为 $o(n)$ 的。
- Hint: 考虑固定 k 分析 $f(n) = f(n/2) + f(n/4) + \dots + f(n/(2k))$, 再令 $k \rightarrow \infty$ 。
- Bonus: 分析 λ 的值和正解一的复杂度。