

报复社会

p_b_p_b

终于轮到我来投题了

题意

给定一棵以 1 为根的有根树，第 i 个点的父亲是 p_i ，其颜色是 col_i ，保证 $col_i \in \{0, 1\}$ 。

Alice 和 Bob 在这棵树上玩游戏。两人轮流操作，Alice 先手。每次操作选取一个点 x ，满足 $x = 1$ 或 p_x 已经被删除，然后把 x 删除。

如果最后一个被删除的点的颜色是 0 则 Alice 胜，否则 Bob 胜。两人都会为了胜利执行最优操作。

给出 T 组数据，对每组数据判断胜者是谁。

对于所有数据，保证 $1 \leq T \leq 10000, 1 \leq \sum n \leq 5 \times 10^5, 1 \leq p_i < i, 0 \leq col_i \leq 1$ 。

Subtask 1 (20 pts): 保证 $T = 1, n \leq 20$ 。

Subtask 2 (30 pts): 保证对于所有 i ，满足 $i = 1 \vee p_i = 1 \vee p_{p_i} = 1$ 。

Subtask 3 (20 pts): 保证对于所有 i ，要么 i 是叶子，要么 i 的子树大小为偶数。

Subtask 4 (30 pts): 无特殊限制。

吐槽

.....?

定义和简单观察

- 称颜色为 0 的点的颜色是白色，颜色为 1 的点的颜色是黑色。
- 不难发现我们只关心叶子的颜色，因此认为非叶子节点没有颜色。
- 不难发现 Alice 的获胜条件等价于在 Bob 把所有白色点删掉之前先把所有黑色点删掉，Bob 则反过来。因此 Alice 的目标大致就是尽可能快地把黑色点删掉。

Subtask 2

- Alice 第一步只能把根删掉，然后树就分裂为若干个菊花。
- 考虑两人有没有什么较为简单的策略。不难想到，对于 Alice 来说，只要当前存在一个能删的黑色点，删掉它肯定不亏，Bob 同理。
- 于是一个菊花的结构就可以得到进一步简化。如果一个菊花里有 5 个黑色点，2 个白色点，那么它与一个只有 3 个黑色点的菊花是等价的。原因就是无论谁把菊花的根删掉了，接下来两人的最优策略都是分别删去 2 个白色点和 2 个黑色点，所以可以认为它们不存在。
- 当一个菊花只有 3 个黑色点，不难发现 Bob 就没有任何删菊花的根的理由了。因此可以认为菊花的根也是黑色的。于是该菊花就被等价于 4 个黑色叶子。
- 还有一种情况没有考虑，即菊花里黑色点和白色点个数相等，这时候谁删根谁就亏。这怎么办呢？
- 考虑 n 的奇偶性。如果 n 是奇数，那么 Alice 就必须执行最后一次操作，这就导致如果最后剩下来一个或若干个黑白个数相同的菊花，一定是 Alice 输。因此 Alice 要被迫去删这些黑白个数相同的菊花。
- 因此，如果 n 是奇数，一个黑白个数相等的菊花等价于一个黑色叶子； n 是偶数则反过来。

Subtask 3

- 沿用 Subtask 2 的讨论，自下往上不断缩菊花即可。证明不显然（? ），但感觉很对。
- 由于保证了每个非叶子节点的子树大小都是偶数，所以不需要讨论黑白相等的情况。
- 或许有其他厉害做法？

Subtask 4

- 直接给出算法，然后归纳证明其正确性。
 - 自底向上 dp，确定每个点的真实颜色
 - 对于叶子，其真实颜色就是输入的颜色
 - 对于非叶子，看其子树内的真实颜色是 0 多还是 1 多
 - 如果 0 多，那么这个点的真实颜色也是 0
 - 如果 1 多，那么这个点的真实颜色也是 1
 - 如果相等，则
 - 如果 n 是偶数（即 Bob 要走最后一步），则这个点的真实颜色是 0
 - 否则（即 Alice 要走最后一步），则这个点的真实颜色是 1
- 最后如果根的真实颜色是 0 则 Alice 胜，否则 Bob 胜。
- 不难发现该算法与缩菊花是等价的，不过更容易证。

Subtask 4 – 证明

- Alice 需要删黑色点， Bob 需要删白色点。
- 对于一个局面， 如果先手需要删的点数 A 小于等于后手需要删的点数 B ， 就是先手必胜， 否则就是后手必胜。
- 分别证明先手必胜可以走到后手必胜、后手必胜走不到后手必胜即可。
- 先手必胜可以走到后手必胜， 即 $A \leq B$ 操作后能使得 $A' < B'$ ：
 - 如果存在一个能删的点， 其颜色刚好是对的， 那就证完了。
 - 否则， 如果目前有至少两个连通块， 或是只有一个连通块但其子树内黑白点数不同， 那么说明 $A < B - 1$ ， 随便操作一步也仍然有 $A' < B'$ 。
 - 否则说明只有一个连通块， 且其子树内黑白点数相同。但这就说明 n 是奇数， 因此这个子树的根应该是先手需要删的， 于是不可能 $A \leq B$ ， 矛盾。
- 后手必胜走不到后手必胜， 即 $A > B$ 操作后仍然有 $A' \geq B'$
 - 因为一次操作只能使 A 减一， 所以是显然的。