《白兔的迷宫》试题讨论

出题人：陈江伦
验题人：孙从博，彭思进

December 7, 2022

题目大意

在一张 n 个点 m 条边的有向图上，白兔从 S 出发随机游走，即每次等概率随机选择一条出边。
m 条边分为两类，白兔手上有一个计数器，初始为 0，经过 1 号边时，计数器会 $+1$，经过第 0 号边时，计数器会清零。
白兔会一直走，直到到达终点 T 时停止，现在有两个问题：

1. 游走结束时，计数器的期望是多少
2. 游走结束时，计数器的方差是多少

得分情况

- 开考一小时 5 人 AC：
  马未然、杨敏行（一血）、柯绎思、修煜然、郑玄晔
- 开考两小时 19 人 AC
- 最终一大半选手 AC

得分情况

- 开考一小时 5 人 AC：
  马未然、杨敏行（一血）、柯绎思、修煜然、郑玄晔
- 开考两小时 19 人 AC
- 最终一大半选手 AC

所以说，这是一道考察集训队选手概率、解方程基础的良心送分题，让大家在进集训队后的第一场考试就能感受到出题人的友善

o=0(4pts)

所有边都是清空边，所以结束时必然为 0 分

输出两个 0 即可

o=1(24pts)
求期望

所有边都是 $+1$ 边。
对于期望，用 $\mathbb{E}[X]$ 表示从 x 出发，出发时计数器为 0，到达终点时的期望分数
列出方程：

$$\mathbb{E}[X] = 1 + \frac{\sum_{(x \to y)} \mathbb{E}[Y]}{d(x)}$$

高斯消元即可

o=1(24pts)

求方差

对于方差，也可以列出相应的方程

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{\sum_{(x\to y)} \mathbb{E}[(1+Y)^2]}{d(x)} \\ &= \frac{\sum_{(x\to y)} \mathbb{E}[1+2Y+Y^2]}{d(x)} \\ &= \frac{\sum_{(x\to y)} 1+2\mathbb{E}[Y]+\mathbb{E}[Y^2]}{d(x)}\end{aligned}$$

注意到式子中的 $\mathbb{E}[Y]$ 已经在求期望的时候求出，所以仍然是 n 个未知数 n 个方程，高斯消元即可

一条链 (8pts)

对于一条链，我们路径是唯一的，所以直接模拟题意计算答案就可以了。

DAG(20pts)

给出的图是一张有向无环图，那么我们就可以按照拓扑序进行处理。
没有环的情况下，计数器的值不会超过 n，所以直接用 $f[i][j]$ 表示从 S 出发，中途到达点 i 并且到达点 i 时计数器为 j 的概率。

$$f[i][j](j>0)=\sum_{(x\to i,1)}\frac{f[x][j-1]}{d(x)}$$

$$f[i][j](j==0)=\sum_{j'=0}^{n}\sum_{(x\to i,0)}\frac{f[x][j']}{d(x)}$$

这样可以计算出到达终点时计数器的完整概率分布，从而计算答案。

满分做法

期望

有了 0 号边以后，我们在列方程时就得考虑当前这条边在以后被清空的概率
先预处理一个值 $g(x)$，表示从 x 出发，在不经过任何 0 号边的情况下，到达终点的概率。

$$g(x) = \frac{\sum_{(x \to y,1)} g(y)}{d(x)}$$

高斯消元求解

满分做法

期望

有了 $g(x)$ 之后就可以计算答案了

转移的时候如果是 0 号边，那么这一步对答案没有任何贡献

如果是 1 号边，那么就要乘上这条边对答案产生贡献的概率：

$$\mathbb{E}[X]=\frac{\sum_{(x\to y,1)}(\mathbb{E}[Y]+g(y))+\sum_{(x\to y,0)}\mathbb{E}[Y]}{d(x)}$$

高斯消元求解

满分做法

方差

怎么解决方差问题呢？
考虑经过一条边 $x \to y$ 以后

- 如果是 0 号边，就只用考虑以后的贡献 $\mathbb{E}[Y^2]$
- 如果是 1 号边，就需要讨论以后会不会遇到 0 号边。定义事件 C，表示在到达终点之前会遇到 0 号边
  - 如果之后遇到 0 号边，就只用考虑以后的贡献 $\mathbb{E}[Y^2|C]$
  - 如果之后没有遇到 0 号边，则需要考虑当前的贡献 $\mathbb{E}[(Y+1)^2|\overline{C}] = \mathbb{E}[Y^2|\overline{C}] + 2\mathbb{E}[Y|\overline{C}] + 1$

题目分析

写成公式就是

$$\mathbb{E}[X^2]=\frac{1}{d(X)}\sum_{(x\to y,1)}(p(C)\mathbb{E}[Y^2|C]+p(\overline{C})(\mathbb{E}[Y^2|\overline{C}]+2\mathbb{E}[Y|\overline{C}]+1))+\frac{1}{d(X)}\sum_{(X\to Y,0)}\mathbb{E}[Y^2]$$

这个时候我们引入了两个量 $\mathbb{E}[X^2|C]$ 和 $\mathbb{E}[X^2|\overline{C}]$，这两个量也是可以列出对应方程的

这样就变成了 $3n$ 个变量的高斯消元问题