

# Pal试题讨论

清华大学 莫涛

# 问题描述

- 给定整数  $n, A, B$
- 对于一个  $1 \sim n$  的全排列  $\mathbf{X}$ ，若整数对  $(X_i, X_j)$  满足  $i < j$  且  $X_i < X_j$ ，则称其为一个顺序对，其权值为  $X_j - X_i$
- 找一个排列，使所有顺序对都满足
  - $X_j \neq A + X_i$
  - $X_j \neq B * X_i$
- 且使得所有顺序对的权值和尽量大

# 数据规模

测试点	$N$	$A$	$B$
1	$\leq 30$	$\leq N$	$\leq N$
2	$\leq 60$	$A \bmod B \neq 0$	$\geq 4$
3	$\leq 70$		$\geq 5$
4	$\leq 80$		$\geq 6$
5	$\leq 90$		$\geq 7$
6	$\leq 90$	$\leq N$	$= 1$
7		$\leq 5$	$\leq N$
8			
9	$= 60$	$= 21$	$= 3$
10	$= 90$	$= 18$	$= 2$

# 评分方式

- 若 $your\_ans \geq our\_ans$ ，得10分。
- 否则得分为

$$\text{Max} \left\{ \left\lfloor 10 * \left( e^{\frac{your\_ans}{our\_ans}} - 2 \right) \right\rfloor, 1 \right\}$$

- 非最优解最多得7分
- 当 $your\_ans < our\_ans * 0.7$ 时只有1分

# 得分情况

- 集训队：
  - 周而进 88
  - 周奕超 67
  - 吴尚 蒋中天 62
- 非集训队：
  - 福建 林洋 65
  - 吉林 赵志恒 61
  - 北京 张放 56



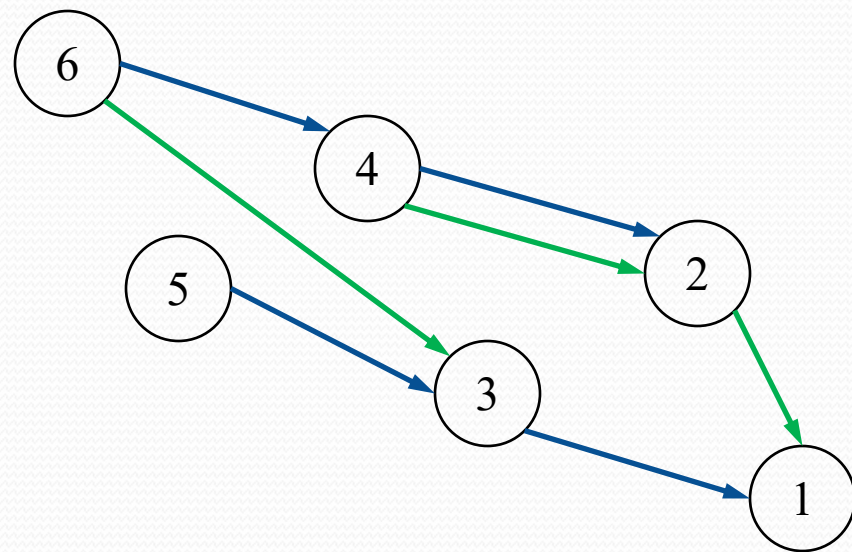
# 试题讨论

# 整体思路

- 题目特点
  - 数据规模约束很强
  - 最多 $90^3$ 种数据
  - 部分分
  - $N$ 越大,  $A$ 越大,  $B$ 越小, 越困难
- 打表
- 搜索, 动态规划, 贪心, 随机化
- 多种算法结合

# 模型抽象

- 转换为图论模型，一个数字用一个结点表示
- 若数字  $p$  必须在数字  $q$  前面(即  $p = A + q$  或  $p = B * q$ ), 则由结点  $p$  向结点  $q$  连一条边
- 可行的序列对应有向无环图的拓扑序列
- 例  $n=6, A=2, B=2$
- 可行序列
  - 5 6 3 4 2 1
  - 6 4 5 3 2 1
  - ...



# 改变权和计算方式

- 令 $F_i$ 表示 $X_i$ 前面比 $X_i$ 小的数的个数
- 则 $Ans = \sum X_j - X_i$   
$$= \sum X_i * (F_i - (N - X_i - (i - 1 - F_i)))$$
$$= (\sum X_i * i) - N(N+1)(N+2)/6$$
- 只需最大化 $\sum X_i * i$

# 算法一

- 状态压缩动态规划
  - $F[L_1, L_2, \dots, L_A]$ 表示当前第  $i$  条链取到第  $L_i$  个数时的最大权和, 枚举下一个取的数来转移
- 可以解决A较小情况
- 期望得分: 20分

# 算法二

- 贪心
- $B=1$ 时，该图只有若干条链。
- 结论：每条链在最优排列中必然是连续的，且平均值较小的链在前。
- 期望得分：10分

# 算法三

- 搜索
  - 搜索顺序：优先权值较小的点，以得到较优的答案
  - 最优化剪枝：去掉剩余的拓扑图中链之间的边，利用贪心算法计算剩下的图能得到的权和的上界，若当前权和加上上界不能优于当前的最优答案，则可以剪枝
- 期望得分：10分

# 几个重要结论

- 结论一：若已知某几个数在最优排列中连续，则可以将它们等价为一个数，大小为它们的平均值。
- 结论二：若最小数可选则立即选择。
- 结论三：若选择某点时其后继点可选，则立即选择其某个后继点。
- 上述结论均可用调整法证明。

# 优化算法

- 直接利用结论二与结论三
- 算法一+优化：40~50分
- 算法三+优化：20~30分

# 一个错误猜想

- 猜想：若剩下的子图是若干不连通的部分，则对每个子图分别求最优解，再利用算法二合并。
- 反例： $(1,4) + (2) = (1,2,4)$
- 子图的最优解不满足从大到小的顺序
- 算法一+优化+猜想：70~80分

# 标程，改进的合并算法

- 子问题：给定若干条链，将其合并使权和最大。
- 根据结论，每次选出平均值最小的块，将其与前驱合并，若已经是链首，则加入最终排列。
- 仍不一定正确，连通块的最优排列对于全局不一定最优。但几乎可以求出最优解。
- 数据2~5，块之间的边较少，易分为若干子图。

# 一个强有力的剪枝

- 每条链的任意前缀在加上它往前任意多个这个前缀不依赖的数后，平均值不变大。
- 搜索+优化+剪枝：60~80分

# 其它算法

- 贪心二，每次选择可选的最小的数。33分。
- 贪心三，每次选择可选的平均值最小的链。54分。
- 随机调整，模拟退火.....



谢谢