

# 尺规作图

清华大学 交叉信息学院 董宏华

# 题意简述

---

- 见标题

# 分数分布

---

- 平均分：略
- 最高分：62
- 最低分：0

# 讨(tu)论(cao)时间

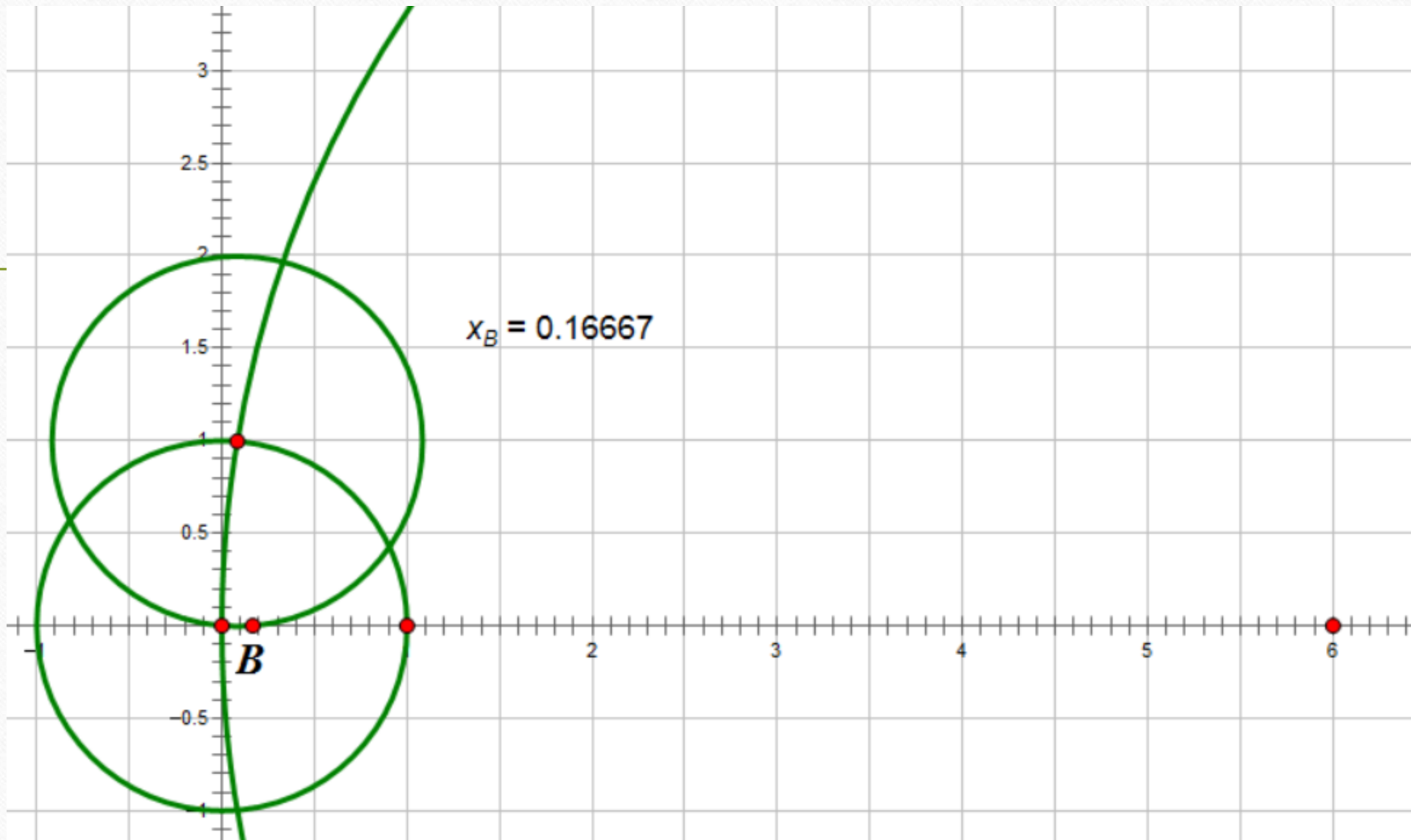
---

- .....

# 二级操作

---

二级操作步数		
1	double	: 2
2	triple	: 4
3	+, -	: 2
4	$x^2/y$ ( $y > x/2$ )	: 5
5	$y^2$ ( $y < 1$ )	: 4
6	$y^2$ ( $y > 1$ )	: 6 <- 7
7	$1/y$ ( $y > 1$ )	: 4
8	$1/y$ ( $y < 1$ )	: 7
9	$\text{sqrt}(2x(x+y))$ use y-axis	: 5
10	$\text{sqrt}(2(y+1))$	: 4
11	$\text{sqrt}(xy)$ use y-axis	: 9
12	中垂线	: 5
13	平行线	: 5
14	固定 p 乘	: $2+3+(2+7)k$
15	平行 乘	: $2+(2+8)k$
16	垂直 乘	: $2+(2+10)k$
17	平行 除	: $(4+8)k$
18	垂直 除	: $(4+10)k$



# 通用解法

---

- 不断中垂线，二分逼近
- 搜索？复杂度增长较快，直接不易出结果
- 搜二级操作！

Draw1.in

$2^{32}$

- 
- 如何迅速让数大起来？
  - 平方！

# Draw2.in $31^{21}$

- 
- 首先构造 31
  - 若利用两次垂直做乘法，垂线可重复利用
  - 直接多次平方
  - 利用  $\frac{x^2}{y}$  的二级操作优化平方

Draw3.in  $\frac{1}{2^{10}}$

---

1024取倒数？

先得到 $\frac{1}{32}$

再平方！

Draw4.in  $\sqrt{22}$

---

勾股定理

Draw5.in

$$\frac{2^{32}}{2^{31} + 7^7}$$

---

还是 $2^{32}$ !

分别构造出 $2^{16}$ ,  $7^7$

利用 $\frac{x^2}{y}$ 的二级操作优化除法

# Draw6.in

$$\frac{15033209079}{49394594533}$$

分别构造分子分母，除一下，但比较慢

上下和3比较接近，减一下

$$49394594533 - 15033209079 * 3 = 4294967296$$

还是和3比较接近，再减一下

$$15033209079 - 4294967296 * 3 = 2148307191$$

仔细看下draw5.in.....

辗转相减？

Draw7.in  $2^{\frac{1}{3}}$

---

这个数是无法做出精确值得

但是可以逼近！

常用逼近方法：

二分

牛顿迭代（二次逼近）

Draw8.in

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$$

正五边形

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

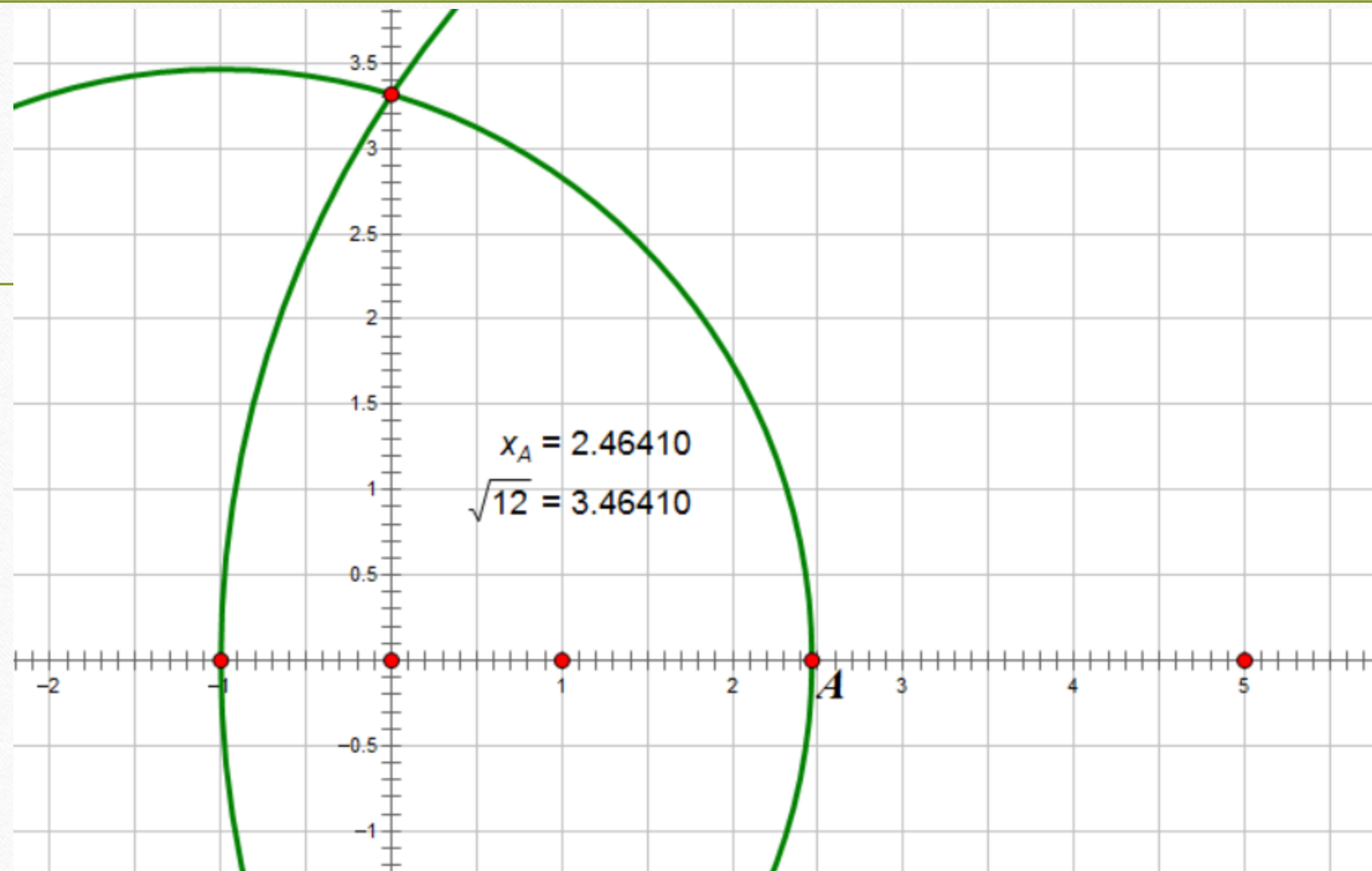
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

# Draw9.in

- 正十七边形

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \left( -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right)$$

- 如何较快地开根号？  $\sqrt{2x(x+y)}$
- 只需4步！



Draw10.in

$$\sqrt{18446744082299486210}$$

---

观察前4位，是不是有种似曾相识？

$$\sqrt{65537^2 + 1}$$

所以在第一个点的基础上略加修改即可

# 补充

---

- 得到基础工具后可以将尺规作图看成一种语言，用来计算加减乘除以及开方。
- 从域的角度看，由加减乘除可得到有理数域。
- 每次平方得到的是一个扩域，所有在扩域中的数均可以通过尺规作图得到，可以得到的数表现为根塔形式。

# 鸣谢

---

- 感谢清华大学杨晶老师开设的抽象代数课
- 感谢吴晨玮、茅佳源等同学的大力帮助
- 感谢CCF
- 感谢北航评测人员的帮助