题目大意

题目描述

给定一个 $N \times M$ 的网格图，每个格子初始为白色，现在需要将 K 个格子染成黑色，使得每行每列的黑格子数均为奇数，求方案数。

输入格式

一行三个整数 N, M, K。

输出格式

输出一行一个整数，表示方案数 $\bmod 998244353$ 的结果。

样例一

input

```
3 3 5
```

output

```
9
```

样例二

input

```
500 1000 1000
```

output

```
928165755
```

数据范围

测试点编号	N, M	K
$1, 2$	$N \times M \le 20$	
$3, 4$	$N \times M \le 100$	
$5, 6$	$N \times M \le 5000$	$K \le 100$
$7, 8$	$N \times M \le 5000$	
$9, 10, 11$	$N \times M \le 10^5$	
$12, 13$	$N \times M \le 5 \times 10^5$	$K \in \{N, M\}$
$14, 15$	$N \times M \le 5 \times 10^5$	$K \le 1000$
$16, 17, 18, 19, 20$	$N \times M \le 5 \times 10^5$	

对于所有数据，保证 N, M 为正整数，$0 \le K \le N \times M$，对于所有编号为偶数的点，有 $N = M$。

解题过程

如果没有 k 的限制，考虑异或卷积，设长度为 2^n 的序列为 $f_s = [count(s) = 1]$，其中 $count(s)$ 表示 s 中 1 的 个数，那么答案就是:

$$(\underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{m个f})_{2^n-1}$$

如果有 k 的限制，我们可以设 $f_s = [count(s) = 1]x^{count(s)}$，答案即为:

$$[x^k](\underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{m个f})_{2^n-1}$$

对序列 f 做 fwt 得到 $fwt(f)$，注意到 $fwt(f)_s$ 的值只跟 $count(s)$ 的值有关，不妨设 $f_s = g_{count(s)}$，那么我们有:

$$g_i = \sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{n-i}(-1)^a\binom{i}{a}[a + b \bmod 2 = 1]\binom{n-i}{b}x^{a+b}$$

$$g_i = \sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{n-i}(-1)^a\binom{i}{a}\frac{1-(-1)^{a+b}}{2}\binom{n-i}{b}$$

$$g_i = \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{n-i}(-1)^a\binom{i}{a}x^a\binom{n-i}{b}x^b - (-1)^b\binom{i}{a}x^a\binom{n-i}{b}x^b$$

$$g_i = \frac{(1-x)^i(1+x)^{n-i} - (1+x)^i(1-x)^{n-i}}{2}$$

令 $f^n = \underbrace{f \otimes f \otimes \cdots \otimes f}_{n}$，$g^n = \underbrace{g \bullet g \bullet \cdots \bullet g}_{n}$，其中 $\bullet$ 表示点乘，即按位乘，因此:

$$g_i^m=\frac{[(1-x)^i(1+x)^{n-i}-(1+x)^i(1-x)^{n-i}]^m}{2^m}$$

$$2^m g_i^m=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(1-x)^{nm-ij-(n-i)(m-j)}(1+x)^{ij+(n-i)(m-j)}$$

$$f_{2^n-1}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}g_i=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}(1-x)^{nm-ij-(n-i)(m-j)}(1+x)^{ij+(n-i)(m-j)}$$

$$ans=[x^k]f_{2^n-1}$$

考虑如何求 $(1+x)^a(1-x)^b, a+b=nm$，不妨分治往下做，每次 $solve(l,r,f)$ 表示解决 $a\in[l,r]$ 内的问题，$f=(1+x)^l(1-x)^{nm-r}$。令 $mid=\lfloor\frac{l+r}{2}\rfloor$，可以分治 $solve(l,mid,(1-x)^{r-mid})f$， $solve(mid+1,r,(1+x)^{mid+1-l}f)$。

直接做的复杂度显然是错的，但是注意到我们只需要保留 $max(0,k-(r-l))$ 到 k 位的系数，用 NTT 做多项式乘法，因此 $solve(l,r,f)$ 的复杂度是 $(r-l)\log(r-l)$，总复杂度为 $O(nm\log^2 nm)$，求答案时直接求和即可，最终本题的复杂度也为 $O(nm\log^2 nm)$，可以通过。

参考资料

无