《往日之影》解题报告

张铠麒

2023 年 10 月 19 日

1 题目

1.1 题目大意

一个简单图有 n 个顶点，每对顶点之间有 $\frac{1}{2}$ 概率连边，$\frac{1}{2}$ 概率不连边（概率独立），求使得对于每一个顶点 u，在形成的图中度数都 $\bmod 4 = c_u$ 的概率。

由于点之间没有顺序区别，为了减少输入量，给出 a_0, a_1, a_2, a_3，$a_i := \sum\limits_{j=1}^{n} [c_j = i]$。

换句话说，你可以认为 $u \in [1, a_0]$ 的 $c_u = 0$，$u \in [a_0 + 1, a_0 + a_1]$ 的 $c_u = 1$，$u \in [a_0 + a_1 + 1, a_0 + a_1 + a_2]$ 的 $c_u = 2$，$u \in [a_0 + a_1 + a_2 + 1, n]$ 的 $c_u = 3$。

本题多测。

全体数据保证 $T \le 10^5, \sum n \le 10^6, p \in \mathbb{P}, p \ne 2$。

1.2 数据范围

Subtask 1 (10pts) : $T = 1, n \le 7$

Subtask 2 (20pts) : $\sum n \le 40, p = 998244353$

Subtask 3 (10pts) : $\sum n \le 100, p = 998244353$

Subtask 4 (10pts) : $a_0 = n, a_1 = a_2 = a_3 = 0$。

Subtask 5 (50pts) : $T \le 10^5, \sum n \le 10^6$

1.3 时空范围

时间限制：1s

空间限制：512MB

2　解题报告

对于 mod4 这种奇怪的限制，首先考虑进行单位根反演。

由于 $[4|n] = \frac{1}{4}\sum\limits_{j=0}^{3} w_4^{nj}$ 其中 $w_4 = i$。

答案可表示为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{G=(V,E)} \prod_{k=1}^{n} [4|(d_k - c_k)] \\
=&\sum_{G=(V,E)} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} (\frac{w_4^{d_k}}{w_4^{c_k}})^j
\end{aligned}$$

其中 d_k 表示为：在图 G 中，顶点 k 实际度数。

考虑类似交换求和号的操作，将上式看成，先将每个点随机赋权成 $x_i = w_4^0, w_4^1, \cdots w_4^3$，然后求：（此处暂时省略 $\frac{1}{4^n}$ 的系数）

$$\begin{aligned}
&\sum_{G=(V,E)} \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k^{d_k}}{x_k^{c_k}} \\
=&\sum_{G=(V,E)} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{c_k}} \prod_{(u,v)\in E} x_u x_v \\
=&\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{c_k}} \sum_{G=(V,E)} \prod_{(u,v)\in E} x_u x_v
\end{aligned}$$

接下来考虑对于一条边，有 $\frac{1}{2}$ 概率被 G 选择，贡献 $(x_u \times x_v)$，或者以 $\frac{1}{2}$ 概率不被选择贡献 1。

同时每条边的决策是独立的，所以上式可以写成：

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{c_k}} \prod_{1\le u<v\le n} (\frac{1 + x_u x_v}{2})$$

似乎直接计算仍然不好计算，但是由于是四次单位根 i，有众多赋值情况会导致 $1 + x_u x_v = 0$ 从而使得乘积式为 0，下面进行分类讨论。

(1) 不能存在超过两个 i 或者 $-i$。

(2) 1,-1 不能同时存在。

故最终本质不同的赋值情况最多只有 $2^3 \times 4^2 = 128$ 种。(2^3 含义是枚举是 1 还是 -1，以及 $i, -i$ 是否存在；4^2 含义是枚举 $i, -i$ 落入了哪个度数等价类里)。

同时最劣情况的实际枚举量也会远远小于上述估计。

通过扩域进行实数运算，最终回答一次询问的复杂度可做到 $\mathcal{O}(\log n)$ 或者 $\mathcal{O}(\sqrt{p}) \sim \mathcal{O}(1)$。

3 总结

本题主要考察了单位根反演这个技巧。

对于数据范围，由于水平问题，出题人并未想到什么高效的 poly(n) 的算法。

同时认为区分 $\mathcal{O}(1)$ 与 $\mathcal{O}(\log n)$ 的意义不大，并且过大的数据范围会给选手额外的提示，所以出成了现在的样子。

或许是bouns：如果 $p = 2$ 算出现满足条件的图会出现什么状况？