

5A – Fiolki 2

autor zadania: Mateusz Radecki

Treść

Dany jest skierowany graf acykliczny o n wierzchołkach, w którym pierwsze k wierzchołków ma zerowy stopniu wejściowy. Dla każdego przedziału wierzchołków $[\ell, r]$, spełniającego $k < \ell \leq r \leq n$, należy policzyć maksymalną liczbę rozłącznych wierzchołkowo ścieżek, które mogą zaczynać się w pierwszych k wierzchołkach, a kończyć w wierzchołkach o indeksach w tym przedziale. Na wyjściu należy wypisać, dla każdego x z przedziału $[0, k]$, dla ilu przedziałów odpowiedź jest równa x .

Rozwiązanie

Dla każdego wierzchołka, dynamicznie, policzymy sobie pewien wektor rozmiaru k . Będziemy pracować w ciele \mathbb{Z}_p , najlepiej dla jakiejś dużej liczby pierwszej, w optymalnym przypadku większej niż 10^{18} . Dobrym pomysłem jest wybrać $p = 2^{61} - 1$, ze względu na to, że dzięki jej reprezentacji w systemie dwójkowym jesteśmy w stanie szybko wykonywać mnożenie dwóch liczb modulo owa liczba pierwsza. Dla i -tego z pierwszych k wierzchołków, ustalonym dla niego wektorem będzie wektor złożony z samych zer oraz jedynki na i -tej pozycji. Dla każdego wierzchołka o indeksie większym niż k , jego wektorem będzie suma wektorów wierzchołków do niego wchodzących, przemnożonych przez losowe wartości z przedziału $[1, p-1]$. Wszystkie wektory możemy obliczyć dynamicznie w złożoności $\mathcal{O}(mk)$. Po co nam one? Zaraz się przekonamy.

Wybermy pewne k wierzchołków z przedziału $[k+1, n]$ i zastanówmy się, czy możemy wybrać k rozłącznych ścieżek, zaczynających się w wierzchołkach $1, 2, \dots, k$, a kończących się w wybranych wierzchołkach. Spójrzmy na ciąg wektorów tych wierzchołków. Łatwo zauważyć, korzystając z wiedzy o przepływach, że takie k ścieżek nie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy możemy zakazać co najwyżej $k-1$ wierzchołków, tak aby każda ścieżka z któregośkolwiek z pierwszych k wierzchołków do któregośkolwiek z wybranych k wierzchołków przechodziła przez któryś z zakazanych wierzchołków. W szczególności, możemy zakazywać również startowych oraz końcowych wierzchołków. Co jesteśmy wtedy w stanie powiedzieć o wektorach wybranych wierzchołków? Wszystkie są rozpinane przez co najwyżej $k-1$ wektorów zakazanych wierzchołków, a więc nie są one liniowo niezależne.

W tym momencie może pojawić się promyk nadziei, że w przeciwnym przypadku mamy duże prawdopodobieństwo (zależne od wybranej liczby pierwszej p), że owy zbiór wektorów będzie liniowo niezależny. Okazuje się być to prawdą! Co więcej, możemy posuwać obserwacje dalej. Jeśli minimalny rozmiar zbioru, który da się zakazać, aby przeciąć wszystkie ścieżki prowadzące z pierwszych k wierzchołków do wybranego zbioru wierzchołków wynosi q , to wszystkie wektory dla wybranego zbioru wierzchołków na pewno są rozpinane przez pewien zbiór q wektorów, więc rząd macierzy powstałej przez ułożenie obok siebie wektorów wybranych wierzchołków wynosi co najwyżej q . Okazuje się, że rzeczywiście ma on duże prawdopodobieństwo wynosić dokładnie q .

Pominiemy tutaj dowody, jeśli jednak ktoś jest zainteresowany, to polecamy zapoznać się z twierdzeniem Mengera oraz z lematem Schwartz-Zippela.

Zostajemy zatem z zadaniem, gdzie mamy daną macierz M o wymiarach $(n - k) \times k$ i dla każdego $x \in [0, k]$ mamy policzyć liczbę takich przedziałów wierszy tej macierzy, że podmacierz złożona jedynie z tych wierszy M ma rząd dokładnie x .

Zmniejszmy n o k , żeby n było od teraz równe liczbie wierszy w macierzy M . Przeiterujemy się zatem od lewej do prawej po prawym końcu rozważanego przedziału. Nazwijmy aktualnie rozważany prawy koniec r . Istnieje taki ciąg $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$ długości co najwyżej k , że wszystkie jego elementy są dodatnie i zachodzi $r \geq \ell_1 > \ell_2 > \ell_3 \dots$. Dodatkowo, przedział $[\ell_i, r]$ jest najkrótszym takim przedziałem kończącym się na r , że rząd podmacierzy wyznaczonej przez niego jest równy i . Jak zmienia się ciąg $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$, gdy przechodzimy z $r - 1$ do r ? Jeśli r -ty wektor jest wektorem zerowym, to ciąg nie zmienia się wcale. W przeciwnym razie mamy dwa przypadki. Albo r -ty wektor jest liniowo niezależny ze wszystkimi wierszami o indeksach z ciągu $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$, albo nie jest. Jeśli jest liniowo niezależny, to chcemy dodać r -tą pozycję do ciągu, jeśli nie jest, to możemy jedną z wartości w ciągu wymienić na r . Opłaca się wymienić najmniejszą wartość z tych, które wymienić możemy, ale jak ustalić, które z nich możemy wymienić, jest trudnym pytaniem.

Trzymajmy zatem częściowo zeschedkowaną macierz odpowiadającą wektorom na pozycjach z ciągu $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$. Dodatkowo, dla każdego wiersza tej macierzy, trzymajmy informację jaką kombinacją liniową wektorów ze wspomnianych pozycji w macierzy M on jest. Dzięki temu, jeśli umiemy zapisać r -ty wektor jako kombinację liniową wierszy zeschedkowanej macierzy, to możemy też ustalić, jaką kombinacją liniową wierszy macierzy M on jest. Możemy wymienić go na te wektory, które pojawiają się w tej kombinacji z niezerowym współczynnikiem. Po takiej zamianie zeschedkowana macierz nie zmienia się, ale jesteśmy w stanie w czasie $\mathcal{O}(k^2)$ przeliczyć kombinacje liniowe wierszy macierzy M , które składają się na wiersze zeschedkowanej macierzy.

W ten sposób możemy rozwiązać całe zadanie w złożoności $\mathcal{O}(mk + nk^2)$.