

Skipting

Samúel og aðstoðarmaður hans, Kristinn, eru að undirbúa töfrabragð fyrir þáttinn *Uzbekistan Got Talent*. Töfrabragðið snýst um að Samúel leysir eftirfarandi **skiptingarvandamál**: Samúel skal skipta gefnu fylki af jákvæðum heiltölum í K hópa sem eru ekki tómir þannig að summa stakanna í hverjum hópi sé sú sama. Með öðrum orðum, hver heiltala úr fylkinu verður að vera úthlutað nákvæmlega einum af K hópunum og summan innan hvers hóps verður að vera jöfn. Til dæmis, ef gefið er fylkið $[2, 1, 6, 4, 5]$ og $K = 3$, þá væri gild skipting $[2, 4]$, $[1, 5]$ og $[6]$. Í þessu tilfelli er summa stakanna í hverjum hópi nákvæmlega 6.

Töfrabragðið er framkvæmt á eftirfarandi hátt:

- Kristinn og Samúel fara inn í aðskilda klefa og geta ekki átt samskipti sín á milli.
- Einn af dómurunum gefur Kristni fylki A af N heiltölum, $A[0], A[1], \dots, A[N-1]$, þar sem hvert gildi er á milli 1 og M . Dómarinn gefur einnig Kristni gildið K .
- Kristinn velur í mesta lagi $K - 1$ (ekki endilega mismunandi) heiltölur til að **bæta við sem nýjum stökum** í fylkið A . Hver viðbætt heiltala verður einnig að vera á bilinu 1 til M .
- Dómnefndin bætir heiltölunum sem Kristinn valdi við upprunalega fylkið. Þetta útvíkkaða fylki er síðan **raðað í vaxandi röð** og afhent til Samúels, ásamt gildinu K .
- Samúel verður síðan að leysa skiptingarvandamálið fyrir þetta útvíkkaða, raðaða fylki.

Verkefni þitt er að hanna og framkvæma leið fyrir Samúel og Kristin til að ná töfrabragðinu. Hægt er að sanna að, með gefnum takmörkunum, sé til leið fyrir þá að koma með lausn á skiptingarvandamálinu, óháð fylkinu A sem dómnefndin leggur fyrir.

Útfærslusmáatriði

Þú skalt útfæra tvær stefjur.

Stefjan sem þú útfærir fyrir **Kristin** er:

```
std::vector<int> add_numbers(std::vector<int> A, int K, int M)
```

- A : fylki af lengd N sem táknar upprunalega fylkið sem Kristinn fékk.
- K : fjöldi hópa. Athugið að Kristinn getur bætt við allt að $K - 1$ heiltölum í fylkið.
- M : hámarks leyfilegt gildi fyrir hverja upprunalega og nýlega bætta heiltölu.
- Kallað er á þessa stefju nákvæmlega einu sinni fyrir hvert prufutilvik.

Stefjan skal skila fylki C sem inniheldur heiltölurnar sem Kristinn vill bæta við upprunalega fylkið. Látum S tákna lengd fylkisins C .

- S má að hámarki vera $K - 1$.
- Hvert gildi í C verður að vera á bilinu 1 til M .

Stefjan sem þú útfærir fyrir **Samúel** er:

```
std::vector<int> find_partition(std::vector<int> B, int K)
```

- B : fylki af lengd $N + S$ sem inniheldur bæði upprunalegu heiltölurnar úr A og heiltölurnar sem Kristinn bætti við. Stök fylkisins B eru raðað í vaxandi röð.
- K : fjöldi hópa.
- Kallað er á þessa stefju nákvæmlega einu sinni fyrir hvert prufutilvik.

Stefjan skal skila fylki P sem táknar skiptingu B í K aðskilda hópa.

- Lengd P ætti að vera $N + S$.
- Fyrir hvert j þannig að $0 \leq j < N + S$, þá táknar $P[j]$ hópinn sem $B[j]$ tilheyrir.
- Hóparnir ættu að vera númeraðir frá 0 til $K - 1$, sem þýðir að $0 \leq P[j] < K$ verður að gilda fyrir hvert $0 \leq j < N + S$.
- Fyrir hvert i á milli 0 og $K - 1$, verður að vera að minnsta kosti eitt stak j ($0 \leq j < N + S$) þannig að $P[j] = i$.
- Summa gildanna í hverjum af K hópunum verður að vera eins.

Í raunverulegri yfirlýsingu er forrit sem kallar á ofangreindar stefjur keyrt **nákvæmlega tvisvar sinnum**.

- Í fyrstu keyrslu forritsins:
 - er kallað nákvæmlega einu sinni á `add_numbers`.
 - Yfirlýsinguforritið vinnur úr skilaða fylkinu til að reikna út fylkið B .
- Í annarri keyrslu forritsins:
 - er kallað nákvæmlega einu sinni á `find_partition`.

Takmarkanir

- $3 \leq N \leq 100\,000$
- $2 \leq K \leq 100\,000$
- $K \leq N$
- $1 \leq M \leq 10^9$
- $1 \leq A[i] \leq M$ fyrir hvert i þannig að $0 \leq i < N$.

Stigagjöf

Hópur	Stig	Frekari takmarkanir
1	5	$N = 3$
2	4	$M = 1$
3	7	$M \leq 2$
4	10	$N \leq 10$
5	7	$K = 2$
6	12	$K \leq 3$
7	17	$K \leq 10$
8	20	$K \leq 100$
9	18	Engar frekari takmarkanir.

Sýnidæmi

Íhugið eftirfarandi fallbeytingu:

```
add_numbers([8, 2, 9, 6, 1, 5, 5], 3, 9)
```

Í þessu sýnidæmi er $A = [8, 2, 9, 6, 1, 5, 5]$. Við viljum skipta tölunum í $K = 3$ hópa. Kristinn getur bætt við tölum á milli 1 og $M = 9$.

Stefjan getur skilað $[5, 4]$, sem þýðir að Kristinn hefur ákveðið að bæta við $S = 2$ nýjum heiltölum: 5 og 4. Þetta er gilt þar sem bæði gildin eru á milli 1 og $M = 9$.

Útvíkkaða fylkið er síðan raðað og sent til Samúels með eftirfarandi fallbeytingu:

```
find_partition([1, 2, 4, 5, 5, 5, 6, 8, 9], 3)
```

Við getum skipt heiltölunum úr þessu fylki í þessa þrjá hópa: $[1, 5, 9]$, $[2, 5, 8]$ og $[4, 5, 6]$. Athugið að summa allra þessara hópa er jöfn 15. Til að tilkynna þessa skiptingu ætti stefjan að skila fylkinu $[0, 1, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 0]$.

Sýnisyfirferðarforrit

Inntakssnið:

```
N K M
A[0] A[1] ... A[N-1]
```

Úttakssnið:

Eftir að fallbeytingu á `add_numbers` er lokið, þá mun sýnisyfirferðarforritið:

- Reikna út raðaða fylkið B .
- Skrifa út fylkin C og B á eftirfarandi sniði, **fylgt eftir með tómrí línu**:

```
S
C[0] C[1] ... C[S-1]
B[0] B[1] ... B[N+S-1]
```

Eftir fallbeytingu á `find_partition` skilar sýnisyfirferðarforritið:

```
L
P[0] P[1] ... P[L-1]
```

Hér er L lengd fylkisins P sem `find_partition` skilar.