

NOI 2026 第二试《彩虹树》解题报告

NOI 2026 命题组

2026 年 7 月 22 日

$$n \leq 8$$

- 只需枚举结点的颜色等价关系，即集合划分。
- 对每个集合划分：
 - 1 计算所有子树的不同颜色数，得到一个缤纷程度序列；
 - 2 求出集合 T ：其中每个结点的颜色都在祖先中出现过；
 - 3 该序列对所有 $S \subseteq T$ 都可行。
- 对每个 S 的缤纷程度序列去重。
- 复杂度约为 $\mathcal{O}(B_n 2^n n^2)$ ，其中 B_n 是第 n 个 Bell 数。
- 可以通过 $n \leq 8$ 的测试点。

贪心算法

- 对每个结点 u , 定义

$x_u =$ 子树 u 中的不同颜色数,

以及

$z_u = |\{\text{子树 } u \text{ 中出现的颜色}\} \cap \{u \text{ 的严格祖先中出现的颜色}\}|$.

- 根结点没有祖先, 所以整棵树可行当且仅当最终 $z_1 = 0$ 。
- 若某个子树颜色数序列在交集大小 z 下可行, 则把其中一部分颜色改成祖先已有颜色, 可以得到任意更大的可行交集大小。
- 因此, 设计一个贪心算法来最小化 z 。

合并若干棵儿子子树

- 设当前要合并 k 个儿子，其状态为 $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_k, z_k)$ 。
- 记 C 表示合并后减少的颜色总数， D 表示其中属于祖先交集的减少量，则父层合并后的状态为

$$X = \sum_{i=1}^k x_i - C, \quad Z = \sum_{i=1}^k z_i - D.$$

- 必须满足

$$D \leq C,$$

$$\sum_{i=1}^k z_i - D \geq \max_{1 \leq i \leq k} z_i,$$

$$\sum_{i=1}^k x_i - C \geq \max_{1 \leq i \leq k} x_i.$$

加入子树根结点

- 可以先把结点 u 自身看作一个 $(x, z) = (1, 1)$ ，与所有儿子一起合并，再处理 u 是否属于 S 。
 - 若 $u \in S$ ： u 的颜色必须在祖先中出现，最小 z 不变。
 - 若 $u \notin S$ ： 可以令 u 使用一种新颜色，因此最小 z 能减 1。
- 最终答案为 $\sum_{x=1}^n f_{1,x,0}$ 。

固定儿子组合后的最优转移

■ 记

$$A = \sum_{i=1}^k x_i, \quad B = \sum_{i=1}^k z_i, \quad M_x = \max_{1 \leq i \leq k} x_i, \quad M_z = \max_{1 \leq i \leq k} z_i.$$

- 可选的颜色合并次数满足 $0 \leq C \leq A - M_x$ 。
- 为了最小化 Z ，取 $D = \min(C, B - M_z)$ 。因此

$$(X, Z) = \begin{cases} (A - C, B - C), & 0 \leq C \leq B - M_z, \\ (A - C, M_z), & B - M_z \leq C \leq A - M_x. \end{cases}$$

时间复杂度分析

- 若直接为合并后的儿子集合记录 $(\sum x, \max x, \sum z, \max z)$, 再枚举 C 生成所有 (X, Z) , 直接实现可达 $\mathcal{O}(n^6)$ 。
- 可以前缀和优化到 $\mathcal{O}(n^5)$ 。

折线观察

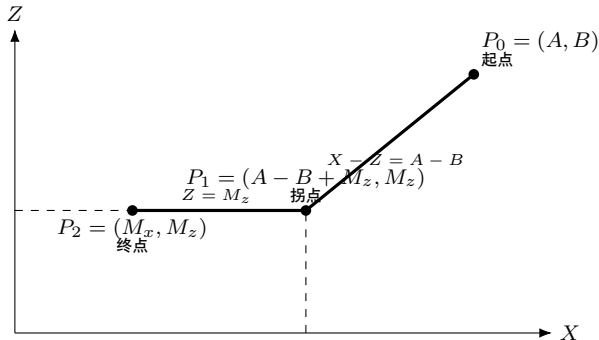
几何图像

可行状态 (X, Z) 先沿斜率为 1 的对角线向左下移动，再沿水平线向左移动。

关键观察

最终并不需要知道完整四元组；只需知道这条折线的三个拐点。

一个四元组对应一条两段折线



点	所需信息
P_0	$(\sum x, \sum z)$
P_1	$(\sum (x - z), \max z)$
P_2	$(\max x, \max z)$

三组 DP

- 对三种拐点，做三个树形 DP：

$$P_u^{(0)}[a, b] : \quad \sum x_i = a, \quad \sum z_i = b,$$

$$P_u^{(1)}[d, m] : \quad \sum (x_i - z_i) = d, \quad \max z_i = m,$$

$$P_u^{(2)}[p, m] : \quad \max x_i = p, \quad \max z_i = m.$$

- $P^{(0)}$ 给出对角段的起点 (a, b) 。
- $P^{(1)}$ 给出拐点 $(d + m, m)$ 。
- $P^{(2)}$ 给出水平段的终点 (p, m) 。
- 合并时分别使用和卷积与 $\max$ 卷积。
- 最后对水平、对角线前缀和得到 DP 数组的真实值即可。

时间复杂度分析

- 三组 DP 中：
 - $(\sum x, \sum z)$ 是二维树形背包；
 - $(\sum(x - z), \max z)$ 和 $(\max x, \max z)$ 含最大值维，可前缀和维护。
- 瓶颈是第一组二维树形背包，朴素总复杂度为 $\mathcal{O}(n^4)$ 。
- 用 NTT 优化可以做到 $\mathcal{O}(n^3 \log n)$ 。