Формално търсим колко сюрективни функции $f: A = \{1, 2, ..., m\} \to B = \{1, 2, ..., n\}$ съществуват.

За $m < n$ отговорът тривиално е 0, за $m \geq n$:

Решение за 5 точки

Директна симулация.

Сложност: $O(n^m)$

Решение за 10 точки

$bitmask\ dp[position][mask]$ и избираме стойността на $f(position)$.

Сложност: $O(n * m * 2^n)$

Решение за 20 точки

$dp[position][remain]$ и избираме дали стойността на $f(position)$ е вече срещана или е нова.

Сложност: $O(n * m)$

Решение за 25 точки

Ако $position < remain$, отговорът отново тривиално е 0, затова можем да пазим $[position - remain][remain]$

Сложност: $O(n * (m - n))$

Решение за 75 точки

Нека A_b е събитието "съществува $a \in A$, такова че $f(a) = b$"

Нека с $w(T)$ обозначим по колко начина може да се случи събитие T. От включване – изключване,

$$w(A_1 \cap ... \cap A_n) = n^m - w((A_1 \cap ... \cap A_n)^C) =$$

$$= n^m - w\left({A_1}^C \cup ... \cup {A_n}^C\right) =$$

$$= n^m - \sum_{\substack{S \subseteq \{1, 2, ..., n\} \\ |S| \neq 0}} (-1)^{|S|-1} * w\left({A_{s_1}}^C \cap ... \cap {A_{s_{|S|}}}^C\right) =$$

$$= n^m - \sum_{\substack{S \subseteq \{1, 2, ..., n\} \\ |S| \neq 0}} (-1)^{|S|-1} * (n - |S|)^m =$$

$$= n^m - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} * (-1)^{k-1} * (n-k)^m =$$

$$= n^m + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} * (-1)^{k} * (n-k)^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * (-1)^{k} * (n-k)^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} * (-1)^{k} * (n-k)^m$$

Сложност: $O(n * log_2(m))$

Решение за 100 точки

По малката теорема на Ферма $a^m \equiv a^{m \, mod \, (1102024631-1)}$ и можем да степенуваме само ако числото $n - k$ е просто, иначе да го пресметнем като $(a * b)^m = a^m * b^m$

Сложност: $O\big(n * ln(ln\,(n)) + \pi(n) * log_2(mod)\big) \sim O(n * ln(ln\,(n)) + \frac{n}{ln\,(n)} * log_2(mod))$

Автор: Мартин Копчев