

IOI2026 中国国家队选拔 第二试 《信号连接》 解题报告

IOI2026 中国国家集训队工作组

2026 年 2 月 11 日

性质

- 记 $w(i, j) = \min(a_i b_j, a_j b_i)$,

$$\alpha^+ = \arg \max_{l \leq i \leq r} a_i, \quad \alpha^- = \arg \min_{l \leq i \leq r} a_i,$$

$$\beta^+ = \arg \max_{l \leq i \leq r} b_i, \quad \beta^- = \arg \min_{l \leq i \leq r} b_i.$$

- 性质 1: 对于所有 $i \in [l, r]$,

$$\min_{l \leq j \leq r} w(i, j) = \min\{w(\alpha^+, i), w(\alpha^-, i), w(\beta^+, i), w(\beta^-, i)\}.$$

- 推论: 对于第一象限的点 i , $\min_{l \leq j \leq r} w(i, j) = \min\{w(\alpha^-, i), w(\beta^-, i)\}$.

性质

- 性质 2: 将所有点按极角排序后, 位于第一象限的且满足 $w(\alpha^-, i) \leq w(\beta^-, i)$ 的点一定构成一个连续段。其余三个象限类似。
- 性质 3: 首先仅考虑每个点与 $\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$ 之间的边, 执行 Boruvka 算法中的一步后, 连通块个数必 ≤ 2 。
- 性质 4: 当连通块个数为 2 时, 分别对于两个连通块求出关键点 $\arg \max a, \arg \min a, \arg \max b, \arg \min b$, 则必存在两个连通块之间的最小边, 使得该边的两个顶点均为关键点。

解法

- 由性质 3, 答案与 $\sum_{i=l}^r \min_{l \leq j \leq r} w(i, j)$ 仅相差 $O(1)$ 项。
- 由性质 2, 找到每个象限的分界线后, 可用可持久化线段树快速计算上式。
- 在此基础上, 考虑取出 $\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$, 先将这些点间的自环及重边的权值从上式中减去, 然后讨论这些点的连通性。
- 若这些点属于两个连通块, 则根据性质 4, 只需要对两个连通块分别求出 $\arg \max a, \arg \min a, \arg \max b, \arg \min b$, 加入最小边即可。
- 时间复杂度 $O(\sum (n + q) \log n)$ 。
- 实现时可能需要比较精细的讨论。