IOI2026 中国国家队选拔 第二试《渡船》解题报告

IOI2026 中国国家集训队工作组

2026 年 2 月 11 日

$k = 1$

- 不难发现，移动经过重复点构成的简单环可以直接删去。
- 因此可行的移动路径一定是一条简单路径。
- 直接 BFS 或 DFS 找到是否存在一条路径即可。交换次数不超过 n。

$k = n$ 且 $\{s_i\}_{i=1}^n = \{t_i\}_{i=1}^n = [n]$

- 每个结点上均有一个人，因此对于任意一条边，可以用两次操作这条边上的两个人，并且不改变这条边的方向。
- 任选一棵生成树，每次找一个叶子，将目的地是这个叶子的人沿路径不断交换到这个叶子上，然后删去这个叶子。交换次数不超过 $2n^2$。

$[s_1, \ldots, s_k]$ 是 $[t_1, \ldots, t_k]$ 的一个排列

- 与前一个特殊性质不同的是，不一定对每条边都能实施交换操作。
- 仍然考虑如何交换两个人，这次需要找到一条路径，然后先令这两个人同时走到路径上的某一个点，此时可以沿着各自来时的路径走到对方所在的点，并且不改变路径上所有边的方向。
- 可以证明，上述交换方式与原操作方式等价。具体地，考虑每个人能到达的所有结点，要么是他自己能够直接走达，要么是和别人走到同一个结点后沿着别人的路径返回。于是对于两个能走到同一个结点的人，他们能到达的结点位置是一致的。这种关系具有传递性，对于每组内部能够交换位置的人，他们不可能离开这个组，而组内是可以随意交换的。

$[s_1,\ldots,s_k]$ 是 $[t_1,\ldots,t_k]$ 的一个排列

- 构建出这个等价类可以采用如下方式：从每个人开始 BFS，将所有能到达的结点染色。若某个结点已有颜色，则合并这两种颜色，并不再更新这个结点的后继。这样每个结点只会被染一次色，染色的时间复杂度是线性的。
- 染色过程的合并构成了这个等价类的一张连通图，任取一个生成树，采用前一个特殊性质的方式交换即可。由于交换每条边时只会经过被这条边两个端点染色的点，因此交换一条路径时，每个点最多被使用两次，故总交换次数不超过 $4nk$。精细实现可以做得更优秀。

完整解法

- 考虑每条边经过的次数，可以构建一个网络流模型：在原图的基础上，令 S 连向所有 s_i，所有 t_i 连向 T，若最大流 $< k$，则一定无解。
- 若最大流 $= k$，则可以找到 k 条边不重复的路径。将所有人沿路径移动，可以得到前一个特殊性质的情况。总交换次数不超过 $5nk$。