# CCF NOI 冬令营 2026《画树》解题报告

CCF NOI 冬令营 2026 命题组

2026 年 2 月 9 日

# 问题转化

- 容易发现任意铅笔橡皮操作都是可逆的。
- 先考虑 $k=1$ 的情况，考虑额外增加一条边 $(p_1, e_1)$，则树变为基环树。
- 分类讨论之后可以发现所有操作都可以被包含进如下操作：
  - 选择 $(x, y, z, w)$ 满足存在边 $x-y-z$，然后删除边 $x-y-z$ 添加边 $x-w-z$，满足图仍然为基环树。
- 显然该操作无法改变任何节点度数奇偶性，同时一切满足该操作要求的操作都可以依次由若干个题中所给操作组合而成。

## 求解 $k_{\min}$

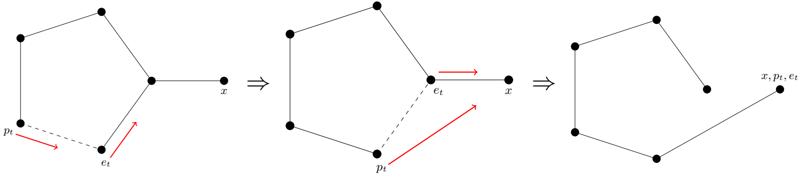
- 容易猜测基环树中的变化只要度数奇偶性一致即可。
- 由于基环树的环不便于处理，题目中直接要求其中一个基环树的环是自环，这样只需要让另一个基环树不断匹配上这个基环树的叶子边即可归纳证明二者可转化。
- 最终判定 $S$ 和 $T$ 是否相等时需要删掉基环树上的一条边，因此只要求 $S, T$ 之间的度数奇偶性不同的点小于等于 $2$。
- 对于 $k > 1$ 的情况是一样的。因此 $k_{\min}$ 可以直接求出：
  - 若 $S = T$，则 $k_{\min} = 0$；
  - 否则设二者度数奇偶性不同的点数量为 $m$，则 $k_{\min} = \max(1, m/2)$。

## 方案构造

- 具体构造方案如下：采用归纳法构造，考虑逆着将 $T$ 变成 $S$，不断地找到 $S$ 的一个叶子，然后让 $T$ 的对应节点满足连边条件。

# 方案构造

- 当 $p_t = e_t$ 时，不难将这对铅笔橡皮同时移动到任意一个节点上。
- 定义操作 $\mathrm{combine}(t, p_t, e_t)$ 表示将一对铅笔橡皮移动到任意同一个节点的操作组合。具体方案如下：在基环树上面不断转圈，然后转到一个拥有至少一个孩子的节点处，此时便可以一次操作将铅笔橡皮移动到这个孩子处。

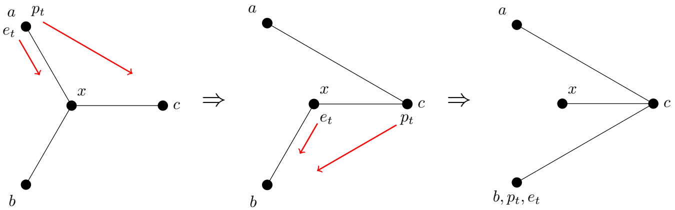


# 方案构造

- 由于归纳法匹配的过程中 $S$ 总是至少有一个叶子节点，该节点度数为奇数，因此 $T$ 中该节点度数同样为奇数，故一定不会出现基环树上所有节点都没有孩子的情况，即上述操作总是可行的。

# 方案构造

- 接下来只需处理一个节点的连边。仅考虑未匹配好的树状结构，根据归纳法的构造过程，该节点度数为奇数，因此可以先把该节点的度数降到 $1$。
- 具体而言，假设该节点 $x$ 有三个孩子 $a, b, c$，将 $(p_t, e_t)$ 进行如下移动：$(a, a) \to (c, x) \to (b, b)$，此时 $x - a$ 与 $x - b$ 的连边均被删除，且保持铅笔橡皮对在同一个点。



# 方案构造

- 不断如此操作直到节点 $x$ 只剩一个孩子 $y$，假设 $x$ 最终需要连边连向 $z$，将 $(p_t, e_t)$ 进行如下移动：$(x, x) \to (z, y)$，最后再调用一次 $\mathrm{combine}(t, z, y)$ 即可将铅笔橡皮对复原。
- 总操作次数 $O(n^2)$。由于数据随机，操作次数远低于题目限制。