CCF NOI 冬令营 2026《猫和老鼠》解题报告

CCF NOI 冬令营 2026 命题组

2026 年 2 月 9 日

性质

- 只需要强制要求 Jerry 在每个整数时刻的下标都处于 $\{0.5, 1.5, \dots, m-0.5\}$ 这个集合中，且在每个整数时刻间只能向左移动 1，向右移动 1 或在原地不动，可以证明此时答案保持不变。

$n, m, k, t_i, w_i \le 10$

- 直接 2^n 枚举所有保留机械猫的情况。
- 使用动态规划检验 Jerry 是否能逃脱：记 $f_{i,x}$ 表示第 i 秒 Jerry 在 x 处剩余的最大血量，转移不难得出。时间复杂度 $O(2^n m(n + m + \max(t_i)))$。

$k=1$，$w_i=0$，$O(nm+\max(t_i))$

- 由于所有 $w=0$，可以直接选择所有的机器猫，然后检验 Jerry 是否能逃脱：记 $f_{i,x} \in \{0,1\}$ 表示第 i 秒时，Jerry 能否在不触碰老鼠炸弹的前提下在坐标 x 处。
- 观察 $f_{i,x} \neq f_{i+1,x}$ 的必要条件：
  - $f_{i-1,x}=0$，并且 $f_{i-1,x-1}=1$ 或 $f_{i-1,x+1}=1$；
  - $f_{i-1,x}=1$，并且有一个机械猫在 $[i-1,i]$ 这个时间区间内经过了 x。
- 由于每个机械猫经过的位置数量总和不超过 nm，因此只有至多 nm 种情况满足 $f_{i-1,x}=1$ 且 $f_{i,x}=0$。即 f 中一个位置，随时间推演中由 1 变 0 的次数只有 nm，那么相对地由 0 变 1 也不会超出 nm 次，可以直接均摊地维护所有发生变化的位置。
- 具体地，可以维护所有 $f_{i,x} \neq f_{i,x+1}$ 的位置，然后实时更新即可做到 $O(nm+\max(t_i))$ 的时间复杂度。实际上，对于任意 k，均可做到 $O(nm)$ 的时间复杂度，此处留给选手自行思考。

$a_i \le b_i$

- 所有机械猫从左向右移动，因此任意时刻 Jerry 可行的位置集合是 $\{0.5, \ldots, m - 0.5\}$ 的一个后缀。考虑维护这个后缀的左端点。
- 机械猫会将端点向右“推动”，而 Jerry 会不断尝试向左“逃脱”。
- 第 i 只猫的“推动成果”能被第 j 只猫“继承”当且仅当 $t_j + a_j \le 2b_i - a_i + t_i$ 且 $t_i + a_i \le t_j - a_j$。
  - 对于 $w_i = 0$ 且 $k = 1$ 的情况，可以直接建立偏序图求可达性，时间复杂度 $O(n \log n)$。
  - 对于 $w_i = 0$ 的情况，需要找出求 k 条路径，即判断最大流是否 $\ge k$，时间复杂度 $O(nk \log n)$。
  - 对于 $k = 1$ 的情况，需要求最短路，直接求的时间复杂度为 $O(n \log^2 n)$，但由于非 0 边只有 n 条，因此可以做到 $O(n \log n)$。
- 这里的“流”与“最短路”预示了正解的方向。

问题转化

- 考虑建立以位置和时间为轴的平面直角坐标系，则 Jerry 只能向右上 45° 或左上 45° 移动。将坐标系旋转 45°，则 Jerry 转化为只能向右或向上移动。则问题变为：是否存在从左下走到右上，且穿越不超过 k 条线段的路径。

$w = 0$

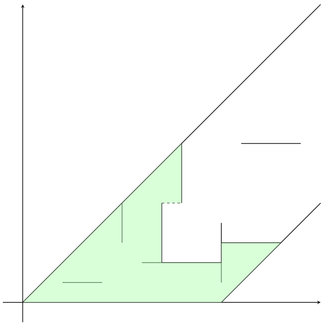
- 直接离散化坐标后动态规划，时间复杂度 $O(n^2)$。
- 记 $f_{x,y}$ 为从左下移动到 (x, y) 处至少会碰到几条线段。考虑 f 的差分，记 $g_{x,y} = f_{x,y} - f_{x,y-1}$。
- 扫描 x，然后用线段树维护 g_x。考虑对于一条平行于 y 轴的，$(x - 0.5, l)$ 连向 $(x - 0.5, r)$ 的线段（$l \le r$），就是对所有 $y \in [l, r]$ 的 $f_{x,y}$ 区间加 1，转移到差分上就是令 $g_{x,l+0.5}$ 加 1，$g_{x,r+0.5}$ 减 1。
- 考虑令 $d_{x,y}$ 表示 $(x, y - 1)$ 和 (x, y) 间线段的数量，$g_{x,y} - d_{x,y}$ 可以用类似的方式用线段树维护，对于一条平行于 x 轴的，$(l, y - 0.5)$ 连向 $(r, y - 0.5)$ 的线段（$l \le r$），在 $l + 0.5$ 处线段树单点加 1，在 x 扫描到 $r + 0.5$ 时单点减 1 即可。

$w = 0$

- 接下来处理 $f_{x,y-1} \to f_{x,y}$ 的转移。考虑该影响即 y 从小到大扫描，如果 $g_{x,y} > d_{x,y}$，则令 $c = g_{x,y} - d_{x,y}$，然后 $g_{x,y}$ 减小 c，$g_{x,y}$ 增加 c。该过程可以用线段树维护，只需要对于每个位置能快速找出下一个 $g_{x,y} - d_{x,y}$ 非 0 的位置在哪就行了，不难用线段树二分快速查找，而 $g_{x,y} > d_{x,y}$ 的位置只可能是被平行于 y 轴的线段带来影响修改的位置，从每个 $g_{x,y} > d_{x,y}$ 的位置向后更新直到停止即可，也不难分析出总共均摊只需要 $2n$ 次线段树二分，总时间复杂度 $O(n \log n)$。
- 该部分也存在时间复杂度 $O(nk \log n)$ 和 $O(n^2k/w)$ 的做法，应该会根据实现的常数获得不同的分数。

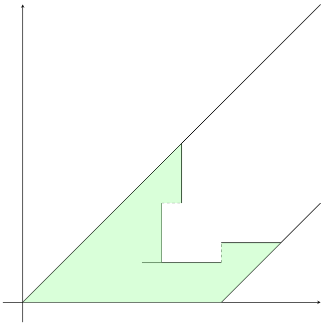
$k = 1$

- 此时 Jerry 不能触碰任何的线段，无非分为可达的位置和不可达的位置两种，如下是一种可能的情况：



$k = 1$

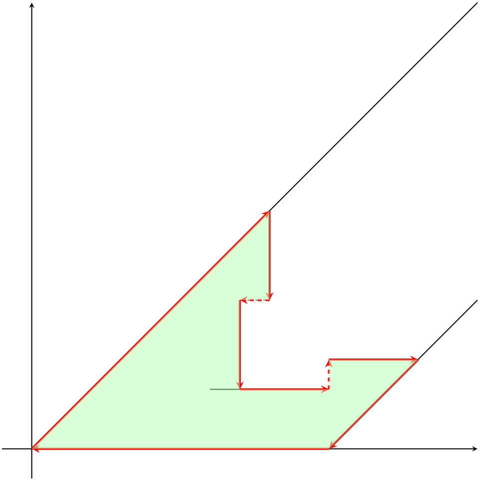
- 反过来考虑 Tom 的策略，为了保证 Jerry 到达的位置不会变多，至少需要保留如下线段：



$k = 1$

- 因此，若想要 Jerry 无法逃脱，Tom 需要找出一个可达部分与不可达部分的分界线。
- 需要注意的是，这个边界并非所有的部分都需要有机械猫形成的线段，有一些边界是由于 Jerry 不能向左和下移动自然存在的。
- 考虑对边界“定向”，强制要求以顺时针顺序遍历 Jerry 可达部分的边界。

$k = 1$



$k = 1$

- 也就是说，需要找出一条如下路径：从左上边界出发，可以任意向左或向上，或根据机械猫形成的线段向右或向下，直到抵达右下边界。
- 对于所有机械猫形成的线段，走到端点处均不劣。
- 与 $a_i \le b_i$ 的情况类似，对于所有机械猫形成的线段的端点，向所有处于其左上方的线段端点连边即可。
- 直接求解最短路的时间复杂度为 $O(n^2)$。
- 使用树状数组优化建图可以做到 $O(n \log^2 n)$ 或 $O(n \log n)$ 的时间复杂度。

完整解法

- 对于 $k > 1$，需要找出 k 条路径，可以使用最小费用最大流求解，时间复杂度 $O(n^3 k)$。
- 使用树状数组优化建图，然后使用 Primal-Dual 原始对偶算法求解费用流，时间复杂度 $O(nk\log^2 n)$。