Растягивание плоскости

Группа 1

Реализуем наивное решение: для каждого запроса переберём все пары точек за $O(n^2 \cdot q)$.

Группы $2 - 3$

Заметим, что пара точек, расстояние между которыми наибольшее всегда лежит на выпуклой оболочке исходного множества точек, так как множество точек лежащих на выпуклой оболочке не меняется от запроса к запросу, построить выпуклую оболочку можно 1 раз в целых числах за $O(n^2)$.

Затем, для ответа на запрос воспользуемся одним из стандартных алгоритмов, позволяющих найти 2 наиболее удалённые точки выпуклого многоугольника. Это можно сделать за $O(n)$ с помощью вращающихся калиперов, или за $O(n \cdot log(n))$ найдя для каждой стороны не более двух наиболее удалённых от неё точек, с помощью поиска касательной к выпуклому многоугольнику параллельной данной прямой, и прорелаксировав ответ через пары, состоящие из точек на стороне и этих $1 - 2$ точек.

Группы $4 - 5$

Так как все точки случайные, размер выпуклой оболочки $O(\log(n))$, в 4-й группе можно реализовать наивное решение из 1-й группы, дополнительно построив выпуклую оболочку, в 5-й достаточно реализовать решение, описанное в $2 - 3$ группах построив выпуклую оболочку за $O(n \cdot \log(n))$.

Обсудим идею, приближающую нас к полному решению:

Назовём выпуклую оболочку исходного множества точек A. Тогда утверждается, что расстояние между двумя наиболее удалёнными точками в этом множестве, это максимальное расстояние от начала координат до точки лежащей в множестве B — сумме Минковского A и $-A$. Заметим, что B при растяжении A в α раз так же растягивается в α раз. Таким образом задача сводится к следующей: дано $O(n)$ пар точек (x, y), требуется отвечать на запрос $\max_{(x,y)\in B} \sqrt{x^2 \cdot \alpha^2 + y^2} = \sqrt{\max_{(x,y)\in B} (x^2 \cdot \alpha^2 + y^2)}$, таким образом мы сводим задачу к поиску максимума в точке среди множества линейных функций, которая решается с помощью convex hull trick за $O(q \cdot \log(n))$.

Группы $6 - 7$

В этих группах нужно было выделить множество линейных функций за квадрат, воспользовавшись тем фактом, что для каждой стороны $1 - 2$ наиболее удалённые от неё точки не изменяются, этот доказывается через то, что от растяжения плоскости в α раз, знаки векторных произведений векторов на этой плоскости не меняются.

Затем, построим на этом множестве линейных функциях выпуклую оболочку и будем отвечать на запросы с помощью бинарного поиска.

Таким образом получается решение за $O(n^2 + (n + q) \cdot \log(n))$.

Группы $8 - 9$

Для полного решения нужно было выделить множество линейных за окололинейное время, а, затем воспользоваться решением для групп $6 - 7$.

Итого: $O((n + q) \cdot \log(n + q))$, 100 баллов и никаких операций с вещественными числами, помимо поиска оптимума среди множества линейных функций.