

## Странная сумма

Заметим, что манхеттенское расстояние между клетками  $(r_1, c_1)$  и  $(r_2, c_2)$  — равно  $|r_1 - r_2| + |c_1 - c_2|$ . В качестве одного из кратчайших путей мы можем рассмотреть путь, который в начале меняет первую координату, а потом — вторую.

Чтобы решить первую подзадачу, достаточно перебрать все пары клеток, и если две клетки в паре имеют одинаковый цвет, добавить расстояние между ними к ответу.

Решим четвёртую подзадачу, где количество цветов равно двум. Заметим, что кратчайший путь между двумя клетками пересекает границу между строками  $r$  и  $r + 1$  когда первая координата одной из клеток не больше  $r$ , а другой — не меньше  $r + 1$ . Для каждого префикса и суффикса строк посчитаем общее количество клеток каждого из цветов, после этого мы можем за  $O(1)$  вычислить количество путей, пересекающих каждую границу между строками. Аналогично посчитаем количество путей, пересекающих границы между столбцами. Поскольку длина пути — это количество раз, которое он пересекает границы, мы можем просуммировать все количества пересечений границ, и получить ответ.

Решим вторую подзадачу, где есть всего одна строка. С помощью хеш-таблицы мы можем для каждого цвета получить список позиций клеток с этим цветом. Пусть эти позиции  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ . Тогда мы хотим посчитать  $\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} |c_i - c_j|$ . Отсортируем массив  $c$  и назовём результат  $s$ . Тогда:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} |c_i - c_j| = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} s_j - s_i = \left( \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} s_j \right) + \left( \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} -s_i \right)$$

Значение  $s_j$  встречается в первой двойной сумме в точности  $j$  раз, значение  $-s_i$  встречается во второй сумме в точности  $k - 1 - j$  раз. Тогда, сумма равна:

$$\sum_{j=0}^{k-1} j s_j + \sum_{i=0}^{k-1} -(k - 1 - i) s_i = \sum_{i=0}^{k-1} (2i + 1 - k) s_i$$

Последнюю сумму можно вычислить за линейное время.

Чтобы решить третью подзадачу, достаточно использовать решение второй подзадачи, но нужно для каждого цвета добавить к ответу произведение количеств его вхождений в первую и вторую строку.

Для полного решения нужно было заметить, что задачу можно решать отдельно по строкам и столбцам. Переберём цвет, пусть множество клеток определённого цвета —  $(r_0, c_0), \dots, (r_{k-1}, c_{k-1})$ . Искомая сумма равна:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} |r_i - r_j| + |c_i - c_j| = \left( \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} |r_i - r_j| \right) + \left( \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} |c_i - c_j| \right)$$

Мы можем посчитать первую и вторую сумму аналогично второй подзадаче. Асимптотика решения —  $O(nm \log(nm))$ . Мы можем не сортировать массивы, а добавлять клетки в хеш-таблицу в правильном порядке, тогда получим асимптотику  $O(nm)$ .