Хорошие массивы

$O(nc^2)$ (29 баллов)

Обозначим $dp[i][j]$ как количество массивов длины i, где на последней позиции стоит число со значением j. Изначально объявим все $dp[1][j] = 1$. Произвольное $dp[i][j]$ можно вычислить как $dp[i][j] = \sum_{j|d} dp[i-1][d]$ (перебираем d от j до n и проверяем, делится ли d на j). Состояний динамики $O(nc)$, каждое вычисляется за $O(c)$. Ответом будет $dp[n][1] + dp[n][2] + \ldots + dp[n][c]$

$O(nc \log c)$ (41 балл)

В решении предыдущей группы можно заметить, что на j делятся $j,\ 2j,\ 3j, \ldots$ и пересчитывать состояние $dp[i][j]$ как $dp[i-1][j] + dp[i-1][2j] + \ldots$ Тогда пересчет на слое происходит суммарно за $O(c \log c)$, слоев $O(n)$, поэтому общее время работы составит $O(nc \log c)$.

$O(c \log c + n)$ (71 балл)

Обозначим количество хороших массивов, в которых первое число x, за $f(x)$. Ответом на задачу будет $f(1) + f(2) + \ldots + f(c)$. Научимся искать $f(p^k)$. Сначала будет идти c_k чисел p^k, затем c_{k-1} чисел p^{k-1}, $\ldots$, c_0 чисел p^0. p^k должно встречаться хотя бы раз, остальные могут встречаться и 0 раз. Тогда $f(p^k)$ — количество рабзиений числа n на 1 положительное и k неотрицательных слагаемых, то есть C_{n+k-1}^k. $f(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k})$. Тогда массиву $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ будет соответствовать пара массивов $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ и $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$, где $a_i = b_i c_i$ и b_i - это p_1 в некоторой степени, c_i - произведение $p_2,\ \ldots,\ p_k$ в некоторых степенях. Применив утверждение несколько раз, получим $f(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \ldots f(p_k^{\alpha_k})$. С помощью решета Эратосфена найдем для каждого числа минимальный делитель. Тогда для нахождения $f(x)$ необходимо разложить x на множители за $O(\log c)$, посчитать для них ответы и перемножить. Чтобы искать C_n^k, можно преподсчитать факториалы и обратные к ним. Общее время работы - $O(c \log c)$.

$O(c + n)$ (86 баллов)

Насчитать все $f(i)$ можно с помощью решета Эратосфена за $O(c)$. Для каждого числа i считаем его наименьший делитель p и степень его вхождения в разложение d. Тогда $f(i) = f(p^d) \cdot f(\frac{i}{p^d}) = C_{n+d-1}^d \cdot f(\frac{i}{p^d})$.

$O(c)$ (100 баллов)

Можно не считать все факториалы и обратные к ним. Достаточно заранее посчитать все C_{n+d-1}^d (каждое за $O(d)$) так как d может принимать не более $O(\log C)$ различных значений.