IOI2026 中国国家集训队集中培训 第二试 C. 奇迹

IOI2026 中国国家集训队工作组

2025 年 12 月 3 日

问题（奇迹（miracle））

- 有一个未知的 $op(i,j)$。
- 现在给定在 $[0,998244353)$ 上均匀随机的整数序列 A,B，和按照特殊方式生成的 C，序列长度均为 3^n 且满足

$$C_k=\left(\sum_{i\oplus j=k}A_i\times B_j\right)\bmod 998244353.$$

- 三进制表示下，

$$\overline{i_0i_1\cdots i_{n-1}}\oplus\overline{j_0j_1\dots j_{n-1}}=\overline{op(i_0,j_0)op(i_1,j_1)\dots op(i_{n-1},j_{n-1})}.$$

- 现在请你找出一个符合的 $op(i,j)$。多组询问。

数据范围：$1\le n\le 10$，$T\le 16$。

$n \le 3$

$n \le 3$

- 枚举运算表 $op(i, j)$ 并挨个验证，总共有 3^9 个可能。

$n \leq 3$

- 枚举运算表 $op(i,j)$ 并挨个验证，总共有 3^9 个可能。
- 为了体现暴力枚举的开销，这部分在时间复杂度中会直接用常数表示。
- 时间复杂度 $O(T3^9 \times 9^n)$，期望得分：$10 \sim 20$。
- 加入足量优化和剪枝可能有大用，在后续的解法中也是如此。

$n \leq 5$

$n \le 5$

- 对于单独的 $C_k = \sum_{op(i,j)=k} A_i B_j$，如果存在另一个 op' 恰好也成立（不保证对于所有 C_k 都成立），由 Schwarz-Zippel 引理得知概率不超过 $\frac{2}{P}$。
- 那么如果这个 C_k 对应两个以上的 op，这个概率的一个上界是 $2 \times 3^9/P$，非常的小。所以几乎检验一次 C_k 就能有唯一解。
- 即使有多组测试，失败概率也大致在 $\frac{2\times 3^9 T}{P}$，而且这个估计非常宽松。

$n \le 5$

- 对于单独的 $C_k = \sum_{op(i,j)=k} A_i B_j$，如果存在另一个 op' 恰好也成立（不保证对于所有 C_k 都成立），由 Schwarz-Zippel 引理得知概率不超过 $\frac{2}{P}$。
- 那么如果这个 C_k 对应两个以上的 op，这个概率的一个上界是 $2 \times 3^9/P$，非常的小。所以几乎检验一次 C_k 就能有唯一解。
- 即使有多组测试，失败概率也大致在 $\frac{2\times 3^9 T}{P}$，而且这个估计非常宽松。
- 因此，在数据随机生成的时候对于一个 op，只需要检验 $O(1)$ 个 C_i。
- 枚举运算表 $op(i,j) = x$ 的位置并验证 C_w，$w = \overline{xx\cdots x}$。

$n \le 5$

- 对于单独的 $C_k = \sum_{op(i,j)=k} A_i B_j$，如果存在另一个 op' 恰好也成立（不保证对于所有 C_k 都成立），由 Schwarz-Zippel 引理得知概率不超过 $\frac{2}{P}$。
- 那么如果这个 C_k 对应两个以上的 op，这个概率的一个上界是 $2 \times 3^9/P$，非常的小。所以几乎检验一次 C_k 就能有唯一解。
- 即使有多组测试，失败概率也大致在 $\frac{2\times 3^9 T}{P}$，而且这个估计非常宽松。
- 因此，在数据随机生成的时候对于一个 op，只需要检验 $O(1)$ 个 C_i。
- 枚举运算表 $op(i,j) = x$ 的位置并验证 C_w，$w = \overline{xx\cdots x}$。
- 实现较差的话，时间复杂度 $O(T2^9 9^n)$。
- 实现精细的话，单次量级在 $\sum_{C=0}^{9} \binom{9}{C} C^n$，$n=5$ 时大约是 2×10^6。

- 实现再精细点!
- 仍然枚举运算表 $op(i,j)=x$ 的位置并挨个验证 C_w， $w=\overline{xx\cdots x}$。

- 实现再精细点！
- 仍然枚举运算表 $op(i,j)=x$ 的位置并挨个验证 C_w，$w=\overline{xx\cdots x}$。
- 但其实可以忽略 x 出现 ≥ 5 次的情况。因为这种情况只会出现在至多一个 x 中，能被其他反推。
- 单次 $\sum_{C=0}^{4}\binom{9}{C}C^n$。
- 这类做法应该难以直接通过此题，但部分分会用到这类思路。

- 实现再精细点!
- 仍然枚举运算表 $op(i,j)=x$ 的位置并挨个验证 C_w，$w=\overline{xx\cdots x}$。
- 但其实可以忽略 x 出现 ≥ 5 次的情况。因为这种情况只会出现在至多一个 x 中，能被其他反推。
- 单次 $\sum_{C=0}^{4}\binom{9}{C}C^n$。
- 这类做法应该难以直接通过此题，但部分分会用到这类思路。
- 测试点 9 应该一定程度上提示了该解法。

测试点 $4,5$：存在 x,y,z 使得 $op=\begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z & z \end{pmatrix}$

测试点 $4,5$：存在 x,y,z 使得 $op = \begin{pmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z & z \end{pmatrix}$

- 对输入进行压缩，进行一些处理后只需要考虑 B' 和 C。
- 由于可能性非常少且形态非常规整，存在诸多能够通过的做法。
- 一个基于 $n \le 5$ 解法的做法：对于所有 x，枚举 A,B,C 中哪些出现过 x 且恰好出现一次，然后进行检验。

测试点 6：存在 x, y 使得 $op = \begin{pmatrix} x & x & y \\ x & x & y \\ y & y & y \end{pmatrix}$

测试点 6：存在 x, y 使得 $op = \begin{pmatrix} x & x & y \\ x & x & y \\ y & y & y \end{pmatrix}$

- 对输入进行压缩，只考虑有三个 2^n 长度的数组，之间做一个特殊的变换。
- 如果 $x = y$，极大概率只有一个位置是非零的，直接找。
- 如果 $x \neq y$，枚举 x, y 的值，验证 C_w，其中 w 二进制下全为 x。当然也可以直接计算或卷积。

测试点 7：存在 a, b 使得 $op(i, j) = (ai + bj) \bmod 3$

测试点 7：存在 a, b 使得 $op(i,j) = (ai + bj) \bmod 3$

- 多次枚举，每次选择任意一个位，对于所有可能的方案检验该位。复杂度 $O(T9 \times 3^n)$。

测试点 7：存在 a, b 使得 $op(i,j) = (ai + bj) \bmod 3$

- 多次枚举，每次选择任意一个位，对于所有可能的方案检验该位。复杂度 $O(T9 \times 3^n)$。

剩余的一些部分分不保证有轻松通过的做法，预期作用是提示思路，但也不排除高度优化后通过的可能性。

$n \leq 10$

$n \leq 10$

- 考虑记录 $A'_t = \sum_{i_0=t} A_i$，同样记录 B'_t，C'_t。
- 这相当于压缩了除了第一位以外的所有位，而维持了三序列之间的联系。

$n \leq 10$

- 考虑记录 $A'_t = \sum_{i_0=t} A_i$，同样记录 B'_t，C'_t。
- 这相当于压缩了除了第一位以外的所有位，而维持了三序列之间的联系。
- 具体地，考虑所有 $A'_x B'_y$ 里含有的 $A_i B_j$。$i = \overline{xi_1 \ldots}$，$j = \overline{yj_1 \ldots}$ 的时候会转移到 $\overline{op(x,y)op(i_1,j_1)\ldots}$。因此 $A'_x B'_y$ 中包含的所有 $A_i B_j$ 都会转移到 $C'_{op(x,y)}$ 中。从而得到 $C'_k = \sum_{op(x,y)=k} A'_x B'_y$。

$n \leq 10$

- 考虑记录 $A'_t = \sum_{i_0=t} A_i$，同样记录 B'_t，C'_t。
- 这相当于压缩了除了第一位以外的所有位，而维持了三序列之间的联系。
- 具体地，考虑所有 $A'_x B'_y$ 里含有的 $A_i B_j$。$i = \overline{xi_1 \ldots}$，$j = \overline{yj_1 \ldots}$ 的时候会转移到 $\overline{op(x,y)op(i_1,j_1)\ldots}$。因此 $A'_x B'_y$ 中包含的所有 $A_i B_j$ 都会转移到 $C'_{op(x,y)}$ 中。从而得到 $C'_k = \sum_{op(x,y)=k} A'_x B'_y$。
- 此时只需要解决 $n = 1$ 的情形，此处的概率分析和 $n \leq 5$ 的解法中提到的是大致相同的。
- 时间复杂度 $O(T(3^n + 3^9 \times 9))$，不使用显著慢的读入就能获得满分。