IOI2026 中国国家集训队集中培训 第二试 B. 小丑大师的荣耀

IOI2026 中国国家集训队工作组

2025 年 12 月 3 日

问题（小丑大师的荣耀（balatro））

- 对初始为空集的可重集 A 依次进行 q 次操作，操作为以下三种之一：
  1. 给定 x, y，加入无序对 $\{x, y\}$，编号为此前未出现过的最小正整数编号。
  2. 给定 p，删除编号为 p 的无序对。
  3. 给定 $s \le t$，$u \le v$，求出 $\sum_{l=s}^{t} \sum_{r=u}^{v} f(l, r)$。
- 上文中 $f(l, r) = 1$ 若 $l \le r$ 且存在可重集 $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subseteq A$ 以及 $P = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}, e_i \in t_i$ 使得 $\{l, l+1, \ldots, r\} \subseteq P$，否则 $f(l, r) = 0$。
- 二元组中的数均为 $[1, m]$ 中的整数。

数据范围：$1 \le m, q \le 2 \times 10^5$。

$m, q \leq 2000$

$m, q \leq 2000$

- 把无序对 $\{x, y\}$ 看作点集为 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的无向图 G 中的边 (x, y)。
- 如何计算 $f(l, r)$？我们考察 $[l, r]$ 中节点的导出子图，在添加上若干自环 $\{(x, x) | (x, y) \in G \land x \in [l, r] \land y \notin [l, r]\}$ 后，是否每个连通分量均有环。

$m, q \le 2000$

- 把无序对 $\{x, y\}$ 看作点集为 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的无向图 G 中的边 (x, y)。
- 如何计算 $f(l, r)$？我们考察 $[l, r]$ 中节点的导出子图，在添加上若干自环 $\{(x, x)|(x, y) \in G \land x \in [l, r] \land y \notin [l, r]\}$ 后，是否每个连通分量均有环。
- 换一种描述方法。考虑每个无环的连通分量的节点编号区间构成的集合 S，即 $S = \{[\min_{x \in V_C} x, \max_{x \in V_c} x]|(V_C, E_C)$ 是 G 的无环的连通分量$\}$。
- 不难发现 $f(l, r) = 1$ 当且仅当 $l \le r$ 且 S 中不存在 $[l, r]$ 的子区间。

$m, q \leq 2000$

- 把无序对 $\{x, y\}$ 看作点集为 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的无向图 G 中的边 (x, y)。
- 如何计算 $f(l, r)$？我们考察 $[l, r]$ 中节点的导出子图，在添加上若干自环 $\{(x, x)|(x, y) \in G \wedge x \in [l, r] \wedge y \notin [l, r]\}$ 后，是否每个连通分量均有环。
- 换一种描述方法。考虑每个无环的连通分量的节点编号区间构成的集合 S，即 $S = \{[\min_{x \in V_C} x, \max_{x \in V_c} x]|(V_C, E_C)$ 是 G 的无环的连通分量$\}$。
- 不难发现 $f(l, r) = 1$ 当且仅当 $l \leq r$ 且 S 中不存在 $[l, r]$ 的子区间。
- 对于每个询问 $O(m + q)$ 得出 S，然后计算 $a_i = \max\{j|[j, i] \in S\}$，则 $f(l, r) = 1$ 等价于 $\max_{i=1}^{r} a_i < l \leq r$，容易 $O(m)$ 计算出答案。

$m, q \le 2000$

- 把无序对 $\{x, y\}$ 看作点集为 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的无向图 G 中的边 (x, y)。
- 如何计算 $f(l, r)$？我们考察 $[l, r]$ 中节点的导出子图，在添加上若干自环 $\{(x, x) | (x, y) \in G \wedge x \in [l, r] \wedge y \notin [l, r]\}$ 后，是否每个连通分量均有环。
- 换一种描述方法。考虑每个无环的连通分量的节点编号区间构成的集合 S，即 $S = \{[\min_{x \in V_C} x, \max_{x \in V_c} x] | (V_C, E_C)$ 是 G 的无环的连通分量$\}$。
- 不难发现 $f(l, r) = 1$ 当且仅当 $l \le r$ 且 S 中不存在 $[l, r]$ 的子区间。
- 对于每个询问 $O(m + q)$ 得出 S，然后计算 $a_i = \max\{j | [j, i] \in S\}$，则 $f(l, r) = 1$ 等价于 $\max_{i=1}^{r} a_i < l \le r$，容易 $O(m)$ 计算出答案。
- 时间复杂度 $O((m + q)q)$，期望得分：30。

特殊性质 A：所有插入卡牌与移除卡牌的操作均在所有询问之前

特殊性质 A：所有插入卡牌与移除卡牌的操作均在所有询问之前

- 修改在所有询问之前，容易 $O(m+q)$ 得出前文的数组 a。

特殊性质 A：所有插入卡牌与移除卡牌的操作均在所有询问之前

- 修改在所有询问之前，容易 $O(m+q)$ 得出前文的数组 a。
- $$\sum_{l=s}^{t}\sum_{r=u}^{v} f(l,r) = \sum_{r=u}^{v}\left|[s,t]\cap(\max_{i=1}^{r} a_i, r]\cap\mathbb{Z}\right|,$$

  由 $\max_{i=1}^{r} a_i$ 关于 r 单调递增，容易通过前缀和与二分 $O(\log m)$ 回答单次询问。

特殊性质 A：所有插入卡牌与移除卡牌的操作均在所有询问之前

- 修改在所有询问之前，容易 $O(m+q)$ 得出前文的数组 a。
- $$\sum_{l=s}^{t}\sum_{r=u}^{v} f(l,r)=\sum_{r=u}^{v}\left|[s,t]\cap(\max_{i=1}^{r} a_i, r]\cap\mathbb{Z}\right|,$$
  由 $\max_{i=1}^{r} a_i$ 关于 r 单调递增，容易通过前缀和与二分 $O(\log m)$ 回答单次询问。
- 时间复杂度 $O(q\log m)$，结合子任务 1 后，期望得分：40。

特殊性质 B：不存在移除卡牌的操作。

特殊性质 C：所有询问均满足 $s = t$ 且 $u = v$。

特殊性质 B：不存在移除卡牌的操作。

特殊性质 C：所有询问均满足 $s = t$ 且 $u = v$。

- 不难发现 $1, 2$ 操作只会在 S 中插入/删除 $O(1)$ 个区间。

特殊性质 B：不存在移除卡牌的操作。

特殊性质 C：所有询问均满足 $s = t$ 且 $u = v$。

- 不难发现 $1, 2$ 操作只会在 S 中插入/删除 $O(1)$ 个区间。
- 没有删边操作，可以用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出每次 $1, 2$ 操作对 S 的修改。
- 再用 std::set 维护数组 a，线段树维护 $\max_{i=1}^{r} a_i$，做到 $O(\log m)$ 处理修改或询问操作。

特殊性质 B：不存在移除卡牌的操作。

特殊性质 C：所有询问均满足 $s = t$ 且 $u = v$。

- 不难发现 $1, 2$ 操作只会在 S 中插入/删除 $O(1)$ 个区间。
- 没有删边操作，可以用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出每次 $1, 2$ 操作对 S 的修改。
- 再用 std::set 维护数组 a，线段树维护 $\max_{i=1}^{r} a_i$，做到 $O(\log m)$ 处理修改或询问操作。
- 时间复杂度 $O(q \log m)$，结合子任务 1, 2 后，期望得分：50。

特殊性质 C：所有类型为 3 的操作满足 $s=t$ 且 $u=v$。

特殊性质 C：所有类型为 3 的操作满足 $s=t$ 且 $u=v$。

- 与子任务 3 的唯一区别是多了删除操作。

特殊性质 C：所有类型为 3 的操作满足 $s=t$ 且 $u=v$。

- 与子任务 3 的唯一区别是多了删除操作。
- 可以离线求出每条边的存在时间段，再用线段树分治结合可撤销并查集 $O(q\log^2 m)$ 求出每个 $1,2$ 操作对 S 的修改。

特殊性质 C：所有类型为 3 的操作满足 $s = t$ 且 $u = v$。

- 与子任务 3 的唯一区别是多了删除操作。
- 可以离线求出每条边的存在时间段，再用线段树分治结合可撤销并查集 $O(q \log^2 m)$ 求出每个 $1, 2$ 操作对 S 的修改。
- 时间复杂度 $O(q \log^2 m)$，结合子任务 1，2 后，期望得分：70。

特殊性质 B：不存在类型为 2 的操作。

特殊性质 B：不存在类型为 2 的操作。

- 同子任务 3，用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出对每个 1, 2 操作对 S 的修改。

特殊性质 B：不存在类型为 2 的操作。

- 同子任务 3，用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出对每个 1, 2 操作对 S 的修改。
- 对于询问操作，有

$$\sum_{l=s}^{t}\sum_{r=u}^{v} f(l,r)=\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)-\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=t+1}^{+\infty} f(l,r).$$

- 因此不妨把询问操作看作给定 s,u,v 求 $\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)$。

特殊性质 B：不存在类型为 2 的操作。

- 同子任务 3，用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出对每个 1，2 操作对 S 的修改。
- 对于询问操作，有

$$\sum_{l=s}^{t}\sum_{r=u}^{v} f(l,r)=\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)-\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=t+1}^{+\infty} f(l,r).$$

- 因此不妨把询问操作看作给定 s,u,v 求 $\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)$。
- 对 $s\le r$，有

$$\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)=r-\max\{s-1,\max_{i=1}^{r} a_i\}.$$

特殊性质 B：不存在类型为 2 的操作。

- 同子任务 3，用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出对每个 1，2 操作对 S 的修改。
- 对于询问操作，有

$$\sum_{l=s}^{t}\sum_{r=u}^{v} f(l,r) = \sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r) - \sum_{r=u}^{v}\sum_{l=t+1}^{+\infty} f(l,r).$$

- 因此不妨把询问操作看作给定 s,u,v 求 $\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)$。
- 对 $s \le r$，有

$$\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r) = r - \max\{s-1, \max_{i=1}^{r} a_i\}.$$

- 使用类似《楼房重建》一题中的线段树，可以做到 $O(\log^2 m)$ 单点修改 a 数组，$O(\log^2 m)$ 查询 $\sum_{r=u}^{v} \max\{s-1, \max_{i=1}^{r} a_i\}$。

特殊性质 B：不存在类型为 2 的操作。

- 同子任务 3，用并查集 $O(q\alpha(m))$ 求出对每个 1, 2 操作对 S 的修改。
- 对于询问操作，有

$$\sum_{l=s}^{t}\sum_{r=u}^{v} f(l,r) = \sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r) - \sum_{r=u}^{v}\sum_{l=t+1}^{+\infty} f(l,r).$$

- 因此不妨把询问操作看作给定 s,u,v 求 $\sum_{r=u}^{v}\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r)$。
- 对 $s \le r$，有

$$\sum_{l=s}^{+\infty} f(l,r) = r - \max\{s-1, \max_{i=1}^{r} a_i\}.$$

- 使用类似《楼房重建》一题中的线段树，可以做到 $O(\log^2 m)$ 单点修改 a 数组，$O(\log^2 m)$ 查询 $\sum_{r=u}^{v} \max\{s-1, \max_{i=1}^{r} a_i\}$。
- 时间复杂度 $O(q\log^2 m)$，结合子任务 1, 2, 5 后，期望得分：90。

$m, q \le 2 \times 10^5$

$m, q \le 2 \times 10^5$

- 把子任务 3 中的线段树分治用到子任务 4 中即可。

$m, q \leq 2 \times 10^5$

- 把子任务 3 中的线段树分治用到子任务 4 中即可。
- 时间复杂度 $O(q \log^2 m)$，期望得分：100。