IOI2026 中国国家集训队集中培训 第一试 C. 三选二

IOI2026 中国国家集训队工作组

2025 年 12 月 2 日

问题（三选二（three））

- 给定 n 和三个二元组 (a_i, b_i) 满足 $0 \le b_i < a_i \le 2n$，定义值 x 是好的，当且仅当对于所有 $1 \le i \le 3$，均有 $x \bmod a_i \ne b_i$。
- 问有多少 $0 \le l \le r < n$ 使得 $l \sim r$ 都是好的，答案对 $998,244,353$ 取模。

数据范围：$n \le 10^{13}$。

$n \le 10^6$

$n \le 10^6$

- 设 $S_i = \{x | x \bmod a_i = b_i\} \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}$。定义可重集

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \{-1, n\}.$$

- 设 S 中所有元素从小到大排序后分别为 $b_1 \sim b_k$，则答案为

$$\sum_{i=2}^{k} \frac{(b_i - b_{i-1})(b_i - b_{i-1} - 1)}{2}.$$

- 因为只有三个集合，容易直接枚举所有集合中的元素，时间复杂度为

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{3} |S_i|\right) = \Theta\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{n}{a_i}\right) = \Theta(n).$$

$$a_3 > b_3 \geq n$$

$a_3 > b_3 \geq n$

- 即 $S_3 = \varnothing$。
- 考虑只要 S_1, S_2 中某一个较小，就可以先不管这个集合，最后以其大小的代价修正贡献。
- 如果只要考虑一个集合，可以 $\Theta(1)$ 算。
- 剩下的情况是，a_1, a_2 都比较小，此时会有周期 $a_1 a_2$，而一个周期内集合只有 $a_1 + a_2$ 个元素，还是可以枚举。
- 平衡后的时间复杂度为 $\Theta(\sqrt{n})$。
- 使用万能欧几里得算法应该可以做到 $\Theta(\log n)$，但没有实现过。

$n/a_1 \le 10^5$

$n/a_1 \le 10^5$

- 即 $|S_1| \le 10^5$，可以暴力修这部分贡献。
- 然后转化到只剩两个集合，用前面的方法算。

$a_1, a_2, a_3 \leq 10^3$

$a_1, a_2, a_3 \le 10^3$

- 有周期 $a_1a_2a_3$，而一个周期内只有 $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ 个元素，可以暴力。

$n \leq 10^{13}$

$n \le 10^{13}$

- 设置一个阈值 L，如果 $a_i \ge L$，可以先不管这次染色，最后 $\Theta(n/a_i)$ 把其影响到的部分修好。
- 最后会剩下若干个 $a_i \le L$ 的 (a_i, b_i)，最复杂的情况是剩下三个，沿用解法四的分析，此时是 $\Theta(L^2)$。
- 取 $L = n^{2/3}$ 可以将时间复杂度平衡到 $\Theta(n^{2/3})$，需要卡常才能通过。
- 场上有选手实现了该做法，并卡常通过了本题。
- 事后看来，可能应该把前面的子任务分值改小一点，加一个 $n \le 10^{12}$ 的子任务，并将完整数据范围改为 $n \le 10^{14}$。

$n \leq 10^{13}$

$n \le 10^{13}$

- 以下认为对 S 内元素排序时，如果遇到相同的值，一定是来自编号小的等差数列的靠前。
- 设置一个阈值 L，如果每个 a_i 都比 L 大，则解法一是 $\Theta(n/L)$ 的。
- 接下来考虑存在一个 $a_i \le L$。设 A 为可重集 $\{b_i - b_{i-1}\}_{2\le i\le k}$，则 A 中元素必然 $\le L$。考虑求出每个 $\le L$ 的元素出现多少次。
- 考虑 $b_i - b_{i-1}$ 的前一项来自哪个等差数列，设来自第 p 个等差数列。相当于从小到大枚举第 p 个等差数列的元素，设 s, t 为剩下两个等差数列对于这个元素的后继到这个元素的距离，把 $\min(s, t, a_p)$ 加入可重集。
- 每次移动到第 p 个等差数列的下一个元素，相当于将 s, t 都减去 a_p，然后取模到非负值（使用等差数列 i 的 a_i 作为模数，注意 0 有时会被解读为 a_i，取决于 i 和 p 的大小关系）。s, t 每一轮的变化是连成环的，相当于是两边各走一步然后把上面写的数的 min 再和 a_p 取 min 之后加到可重集里，重复这个过程若干次。

- 每一步 $s \leftarrow (s - a_p) \bmod a_i$（注意这里取模可能算出 a_i），可以建一张 a_i 个点的图对应 s 所有可能的取值，因为每次都减 a_p 是常量，连边 $s \to (s - a_p) \bmod a_i$，图的结构是若干个环。
- 现在的问题：给定如上构造的两个环，以及两个环上的起点和常数 a_p，问每次先将两个环上当前走到点上写的数与常数 a_p 三个数的 $\min$ 加入可重集 A，然后两个环各沿着出边走一步，重复某个固定的次数，最终可重集的形态。
- 因为存在一个 $a_i \le L$，两个环都只有 $\le L$ 的值真的有意义。只要算出所有 $\min$ 是环上某个 $\le L$ 的元素，最后减一下就可以算出是 a_p 的次数。枚举一下 $\min$ 在环 c 的值 v 上取到，那么所有在环 c 上走到值 v 的时刻也会是一个等差数列，且对于所有环 c 的元素，这个公差固定。

- 设公差是 d，此时问题变为，询问从另一个环的某个起点出发（起点依赖于 v 的选择），每次跳 d 步，重复若干次，有多少次跳到的位置编号 $\geq v$。可以减一下变成算跳到位置编号 $\leq v$ 的次数。
- 首先，可以建一组新环，新的环上面跳一步相当于原来跳 d 步。然后因为只关心跳到的位置编号 $\leq L$ 的次数，先求出每个编号 $\leq L$ 的位置属于哪个新环，并把所有询问问的是哪个新环以及新环上等效的起点编号是什么都计算出来。
- 从小到大扫描 v，每次会新标记一个新的 $\leq v$ 的点出现，以及要支持查询从某个新环上的某个起点走若干步，经过了多少次被标记的点。
- 对标记的点预先做离散化，这是单点加区间和，使用树状数组维护，时间复杂度 $\Theta(L \log n)$。
- 取 $L = \sqrt{n/\log n}$，总时间复杂度为 $\Theta(\sqrt{n \log n})$。
- 没有特意卡常的标程跑了 1s，实际上取 $L = 10^5$ 比较合适，因为 $\Theta(n/L)$ 的暴力显然非常快。