

《少年汹涌》解题报告

福建省福州第一中学 卢华睿

简要题意

给定 n, L 和序列 a, w 。

定义 $f(x)$ 为如下操作构成的集合：

- 将 x 加入集合。
- 将 $x \leftarrow x + w_{\text{popcount}(x)}$ ，其中 $\text{popcount}(x)$ 表示 x 二进制下 1 的个数，若 $x > L$ 结束操作，否则回到第一步。

求 $|\bigcup_{i=1}^n f(a_i)|$ 的值。

数据范围

$n \leq 6 \times 10^4, 1 \leq w_i \leq 62, 1 \leq a_i \leq L$ 。

子任务	分值	$n \leq$	$L \leq$	特殊性质
1	3	10^3	10^4	A
2	5	6×10^4	$2^{30} - 1$	A
3	10	1	$2^{60} - 1$	无
4	12	10	$2^{60} - 1$	无
5	15	10^2	$2^{60} - 1$	无
6	24	3×10^4	$2^{60} - 1$	A
7	31	6×10^4	$2^{60} - 1$	无

特殊性质 A: $w_i = i, a_i$ 在 $[1, L]$ 中均匀随机。

解题过程

将 w_i 的值域看作与 $\log L$ 同阶。

算法一

模拟题意。

时间复杂度 $O(nL)$ 。

可以通过子任务 1，期望得分 3 分。

算法二

在算法一的基础上，用手写 bitset 记录节点是否被访问过，跳过已被访问的节点。

在随机数据下可以通过。

时间复杂度 $\mathcal{O}(L^{1-\epsilon})$ 。

可以通过子任务 1, 2，期望得分 8 分。

算法三

考虑如何求 $n = 1$ 时答案。

注意到每次跳的长度比较短，所以我们很长一段时间内高位的值都不会变。

于是考虑数位 dp，设 $f_{i,j,k}$ 表示后 i 位为 k ，剩下的位 popcount 为 j ，第一次进位到 $i + 1$ 位的值， g 表示跳了几步。

但 k 的值域太大，观察一个点跳的过程，发现每一位第一次进位后 $k \leq \log V$ 。

于是我们可以考虑只记录后 $\log V$ 位，剩下 $\log V$ 至 i 的位钦定为 0，查询时一个点先从 $\log V$ 位开始把高位一位位改成 0。

最后当超出值域时再往低位填补，而此时也能保证还未填补且 $> \log V$ 的位均为 0，利用 g 数组即可求出答案。

可以通过子任务 1, 3，期望得分 13 分，结合算法二得分 18 分。

算法四

$n \leq 10$ 时考虑容斥，将 $x \rightarrow x + \text{pop}(x)$ 视作树，可以发现只需求 lca。

考虑模拟倍增求 lca 的过程，只需做往上跳 2^k 步和查询深度，深度就是 $n = 1$ 时的答案，可用算法三求出。

往上若干步也可以使用类似的做法求出，先从低往高尝试，在次数超过时往低位做即可。

复杂度因人而异，但均可通过 $n \leq 10$ 。

可以通过子任务 1, 3, 4，期望得分 25 分，结合算法二得分 30 分。

算法五

注意到我们其实只需要求出虚树大小，考虑建虚树，即还需要比较两点 dfs 序。

我们可以用上文的方法求出 lca 后再比较跳到的最后一个点的大小关系，加上排序的 $1\log$ ，总复杂度 $\mathcal{O}(n \log n \log^2 V + \log^3 V)$ 。

可以通过子任务 1, 3, 4, 5，期望得分 40 分，结合算法二得分 45 分。

算法六

对于 $w_i = i$ 的情况，我们观察到会存在一些断点，满足所有小于它的数最终都会跳到它，并且这些断点很密集。

于是我们求 lca 和比较 dfs 序时可以先用 $\log V$ 的复杂度将小的那个数跳到和大的那个数相差不大的位置，然后剩下的部分暴力跳，在数据随机的情况下期望只要 $\log V$ 次。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n \log V + \log^3 V)$ 。

可以通过子任务 1, 2, 3, 6，期望得分 42 分，结合算法五得分 69 分。

算法七

基于算法五。

发现每次跳 2^k 步过于浪费，可以考虑对两个数同时从低位往高位处理，直到某一位会使得两数相等后再从高位往低位做。

比较 dfs 序也类似，需要注意实现细节以及常数，总时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n \log V + \log^3 V)$ 。

可以通过所有子任务，期望得分 100 分。

致谢

感谢沈吉颢、黄佳旭前辈与我讨论做法并提出建议。
感谢林祺昊同学提出的若干种乱搞，丰富了本题的数据多样性和部分分。
感谢王茂骅同学参与验题工作。

参考资料

无。