《携春同行》命题报告

华南师范大学附属中学 叶隽霖

2025 年 10 月 18 日

目录

1 题目描述

有一个隐藏的正整数数组 $a_0, \dots, a_{n-1}$。定义一颗点集为 $0 \sim n-1$ 的树 T 的直径 $D(T)$ 为，当我们把第 i 个点附以点权 a_i 时，最大点权和路径的点权和。你可以作以下两类询问，最后确定尽可能多的 a_i：

- **查询**：询问一棵树 T，交互库会返回 $D(T)$。这个询问是**离线的**，即你要进行完所有查询之后才能知道每次查询的答案。
- **猜测**：询问一棵树 T 和正整数 x，交互库会返回 $[D(T) = x]$。这个操作询问是**在线的**，即每次猜测后可以立刻知道结果。

当你对一个 a_i 不确定其真实值时，你在回答的时候需要在对应位置标记 -1。当你的答案有不超过**两个** -1，且对于非 -1 的位置你的回答都正确，你的答案会被认为是正确的。

只有在**回答的答案都正确、查询次数不超过 501 次、猜测次数不超过 20 次时**，你才能获得这个测试点的满分。否则你可能获得部分分，这取决于两类询问的调用次数（见评分标准）。

2 数据范围

子任务编号	$n \le$	特殊性质	分值
1	10	$1 \le T \le 10$、$1 \le a_i \le 2$	7
2	500	保证 a_i 互不相同	24
3	500	无	69

对于所有数据，保证：$10 \le n \le 500$、$\sum n \le 5 \times 10^4$、$1 \le a_i \le 10^9$。

3 评分标准

每个测试点分数的计算方式是：首先每个测试数据的回答都要正确，否则会获得 0 分。假设 X, Y 表示每个测试数据中，调用查询、猜测次数的最大值，测试点所属子任务满分为 T。你可以获得 $\lfloor Tf(X)g(Y) \rfloor$ 分。

其中：

$$f(x) = \max\left(0, 1 - \left(\frac{\max(x - 501, 0)}{1500}\right)^{0.4}\right)$$

$$g(x) = \max\left(0, \min\left(1, 1.5 - \left(\frac{\max(x - 16, 0)}{128}\right)^{0.2}\right)\right)$$

4 解题过程

首先，当 $\min(a_0, a_1)$ 远大于 $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ 时。我们是无法确定 a_0, a_1 的具体值的。这是因为每个树的直径都会经过 $0, 1$ 两个结点。我们只能知道 $a_0 + a_1$，而无法分辨 a_0, a_1 的具体值。

于是，不能分辨的两个数自然是最大的两个值。

其次，我们总是进行完所有查询之后再去进行猜测。否则之前的猜测是无意义的。

在后面的解题中，记 s 表示所有 a_i 的和、x, y, z 表示第一、二、三大 a_i 的值；

4.1 子任务 1

随机查询 500 个树，判断是否能区分所有 2^n 种情况。

可以直接跑，如果实现得不好也可以本地打表之后按照表询问。

- 查询数量：500；
- 猜测数量：0；
- 期望得分：7。

4.2 子任务 2

考虑 a_i 互不相同的情况。

接下来，我们会介绍一种方法，在 $n+1$ 次离线的查询中，获取 s, z、并且获取哪些 i 满足 $a_i \geq z$（在这个捆绑测试中，i 的数量不超过 3 个）、且对所有 $a_i < z$ 获得其具体值。

我们查询以下 $n+1$ 棵树：

- 查询一条链（链的顺序不重要）；
- 对每个 $i = 1 \sim n$，查询以 i 为中心的菊花，记返回值为 $r(i)$。

对于链，返回值是 s。对于 $r(i)$，有：

$$r(i) = \begin{cases} x + y + z & a_i \in \{x, y, z\} \\ x + y + a_i & a_i \notin \{x, y, z\} \end{cases}$$

在后面的讨论中，一个点 i 是**黑色的**当且仅当 $r(i) = \max r(j)$，即 $a_i \geq z$。反之称之为**白色的**。一个黑色点是**平凡的**当且仅当 $a_i = z$。

则：

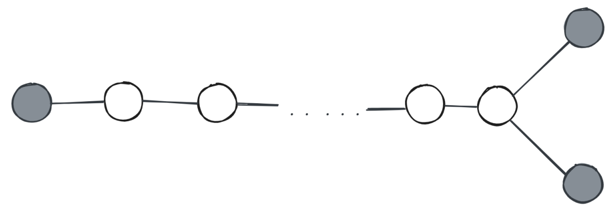
- $\max r(i) = x + y + z$；
- $\sum r(i) = \sum_{i=1}^{n} (x + y + a_i) + (z - x) + (z - y) = (n-1)(x+y) + 2z + s$。

把以上两个等式视为关于 $x + y, z$ 的二元一次方程，可以解出 z。

如果对于所有白色的 i，有 $r(i) = (x + y + z) + (z - a_i)$，这样子我们就能算出来 a_i。

因此，我们通过 $n+1$ 次离线的查询获得了所有白色点的权值。

在这个子任务中，黑色的点恰有 3 个。考虑如下猜测：



我们猜测他的答案是 $s-z$。如果猜对了说明右边的两个黑点里面有一个是 z、否则说明左边的黑点权值是 z。

对三个黑点两两进行猜测即可。

- 查询数量：$n+1$；
- 猜测数量：3；
- 期望得分：31。

4.3 子任务 3

在下面的做法中，为了方便，我们先假设 $x,y>z$，即非平凡元素恰好两个。实际上读者可以验证当 $x,y=z$ 时我们的做法仍然正确。

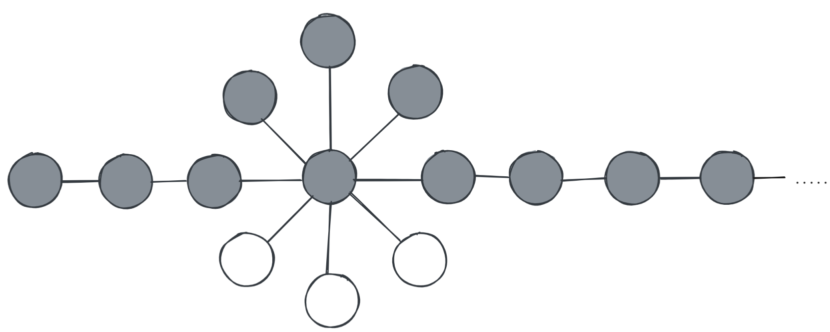
延续子任务 2 的做法。我们需要在 20 次猜测中，在黑色点当中找到这两个非平凡点。

假设黑色点的点集为 B，白色点点集是 W。

首先，我们来确定一些 B 中的平凡点转变为白色点，**使得：$|\mathbf{W}|\geq\mathbf{3}$**。

假设 $k=3-|W|$（$0<k\leq 3$）。则由于 $3k+1+|W|=2k+4\leq 10\leq n$。于是：我们总可以把 B 中的部分元素分成 3 组，每组 k 个元素，同时还有剩余。

对于一个 k 元集 S_0，我们使用以下方法判断其是否有非平凡的元素。作猜测：



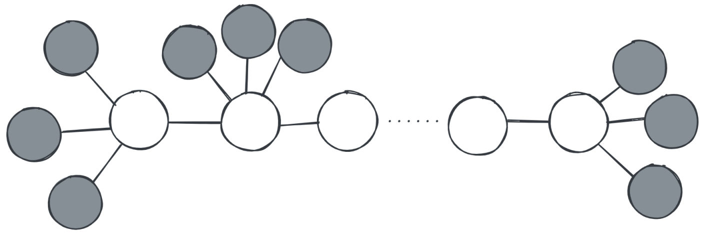
中心是一个不在 k 元集的 B 集合元素。上面的是我们要确定的 S_0。左边，右边是另外两个 k 元集。下面是 W 集合的元素，右边是其余的 B 集合元素。

如果 S_0 中没有非平凡元素，其直径是 $\sum_{i\in B}a_i-kz$。反之，直径达不到这么大。

于是我们通过 1 次猜测成功判断 S_0 是否存在非平凡元素。

由于非平凡元素恰有两个，所以 S_0,S_1,S_2 总有一个集合不存在非平凡元素。我们通过不超过 2 次猜测找到这个集合，并把所有元素加入 W 中。这时 $|W|\geq 3$。

接下来，我们介绍一种方法，把 B 分割为三个集合 X,Y,Z（X,Y 非空，Z 可空），并且判断 X,Y 集合是否都包含非平凡元素。作猜测：



左边黑色点是 X 集合元素，中间黑色点是 Z 集合元素，右边黑色点是 Y 集合元素。

并猜测直径为 $x + y + \sum_{i\in W} a_i$。如果 x, y 不分居 X, Y 集合，那么直径达不到这么大。

于是，我们得到了用一次猜测来判断非平凡元素是否分居两个集合的方法。我们可以按照如下做法，确定这两个非平凡元素：

- 枚举 $w = 0, 1, \ldots$。对于 $i \in B$ 如果 i 二进制下第 w 位是 0 则分配 X，否则分配 Y。进行询问，如果询问成功则退出枚举，并记录成功时的 w（使用了 $w + 1$ 次猜测）；
- 二分 X 集合。每次拿出 X 集合一半的元素加入 Z 集合可以判断非平凡元素在哪一半。这样子我们就确定了 X 中的非平凡元素 p（使用了 $\log n - 1$ 次猜测）；
- 首先，对 Y 集合中只保留后 w 位和 p 完全相同的元素（这一步完成后，Y 中元素个数不超过 $\frac{n}{2^{w+1}}$）。然后和上面一样的方法二分（使用了 $\log n - 1 - w$ 次猜测）。

这样子我们就找到了这两个非平凡元素。在剩下的元素填入 z 即可。

- 查询数量：$n + 1$；
- 猜测数量：$2 + 2\log n - 1 = 19$；
- 期望得分：100。

5　命题思路

交互题是 IOI 中一类重要的题目，历年集训队互测中出现次数较少，笔者便通过枚举题意出出了这个题。

本题原来是 525 次在线询问还原 a 数组，后面发现随机化的暴力卡不掉。便改成了现在的两种操作，询问（离线）和猜测（在线）。

猜测设为了 20 次而不是正解做法极限的 18 次是因为想要减少本题的讨论难度。

6　总结

本题题意简洁，思维难度较高而代码难度较低，做法非常多，区分度较强。

正解思路自然，涉及了多种树的构造、二分算法、不等式分析。最后得出简洁、有力的解法。

7　参考资料

这是一个原创题。没有参考资料。

8 致谢

感谢**郑煦翔、戴睿宸**同学为本题的解法做了一定改进。

感谢**黎莫轩、陈翔乐、李承翰**同学为本题验题。