围绕着我们的圆环

FeiXiuSaiDaXiang(WerKeyTom_FTD)

October 31, 2018

1 Subtask 1

按题意模拟，只需要暴力枚举所有的A和B，判断它们相乘能否得到C即可。

复杂度$O(2^{2n^2}n^3)$。

可以通过$n \leq 3$的数据。

2 Subtask 2, 3

我们假设只枚举矩阵A，能不能计算有多少矩阵B符合条件呢？

答案是可行的。我们来观察B矩阵是什么东西。

假设C_i表示C的列向量，A_i同理。

对于每个C_j，其相当于选择若干个A_k异或而来，系数便是$B[k][j]$。

那么只有每个C_j都在A_k生成的线性空间里时，才会有合法的B。

而B的方案数显然与A的秩有关，假设A的秩是x，那么B有$2^{s(q-x)}$种。

因此我们枚举矩阵A，将它列向量的线性基求出，判断是否有合法方案，然后给答案计算贡献即可。

由于都是01向量，可以使用压位。实际还有许多优化，甚至可以打表。

根据实现不同可以通过$n \leq 4$或$n \leq 5$。

朴素枚举A，求线性基并运用压位的话，复杂度是$O(\frac{2^{n^2}n^3}{w})$。

3 Subtask 4, 5

考虑用更高效的方法解决计数问题。

我们关心的其实是A的秩，同时需要注意满足C的列向量可以被A的列向量表示。

设r表示矩阵C的秩，接下来我们尝试使用动态规划解决这个问题。

考虑逐列确定A，如何考虑每一列是否是A的基向量，并且C的多少基向量能被表示呢？

考虑这样一个过程，初始将C的所有基向量放入一个线性基中。

每当确定一个新的A的列向量时，看能否删除一个C的基向量使得该列向量能加入线性基，如果能则如此执行。

如果该列向量直接能加入线性基中，那便直接加入。

该过程执行完后，线性基内基向量数量就是A的秩，且如果不存在任何C的基向量在线性基内，则说明合法。

这个过程是可以dp的。

设$dp[i][j][k]$表示已经确定了A的前i个列向量，目前已经有j个C的基向量被踢出去了，有k个A的列向量不通过踢出C的基向量而进入了线性基，A有多少种。显然的这说明当前秩为$r+k$，而来自A的基向量有$j+k$个。

考虑转移，分三种情况：

1，j与k均没有改变，说明新的列向量能被目前$j+k$个A的基向量线性组合得出，那么有2^{j+k}种方案。

2，j加一而k不变，k不变说明新的列向量能被目前$r+k$个基向量线性组合得出，减去j不变的情况，有$2^{r+k}-2^{j+k}$种方案。

3，j不变而k加一，这是最后一种情况，方案数是总数减去前两种，即2^p-2^{r+k}。

这是一个状态$O(n^3)$转移$O(1)$的dp，可以接受。

做完该dp后答案等于$\sum_{k=0}^{min(p,q)-r} dp[q][r][k]2^{s(q-r-k)}$

答案与C的秩有关，可以一开始用高斯消元求出C的秩。

对于有修改的部分分，我们之后会讲到如何做。

4 Subtask 6

数据随机意味着矩阵的秩很大（假若当前有k个基向量，加入新的随机向量成为基向量的概率是$\frac{2^n-2^k}{2^n}$，可以发现秩的期望很大）。

而$p=q=s$则很方便。

所以该点实际上就是打表，只需要打600到700即可，而且也只需要保存靠近n的那些秩的答案。

5 Subtask 7

如果矩阵C是单位矩阵，这意味着它是满秩的。

那么矩阵A也应当是满秩的，而且任意满秩矩阵A一定存在且仅存在一个满秩矩阵B满足条件。

于是变成统计满秩矩阵个数，可以设一个简单dp，在$O(n^2)$内解决。

6 Subtask 8

我们发现去统计A的数量，并且得使得A的列向量能线性组合出C的列向量是困难的。

不如不考虑这个，改为考虑对所有秩相同的C的贡献和。

由于秩相同的C答案相等，最后再除以C的个数即可。（容易验证在这个模意义以及数据范围下一定有逆元）。

考虑枚举A的秩x，设C的秩为r，合法的C的每个列向量都可以由A的基向量线性组合得到，可以写成一个$s \times x$的矩阵，而这个矩阵的秩为r。

做一个简单dp得到$f[i][j]$表示$p \times i$的秩为j的矩阵个数，$g[i][j]$表示$s \times i$的秩为j的矩阵个数，显然对答案的贡献为$f[q][x]g[x][r]2^{s(q-x)}$。

最后把算出的答案除掉$f[s][r]$即可。

dp的复杂度是$O(n^2)$，而求秩的复杂度是$O(\frac{n^3}{w})$。

7 Subtask 9

C最重要的是秩，因此我们需要动态维护秩。

这就是带插入和删除的线性基，可以离线用分治来避免删除操作。

时间复杂度$O(\frac{m(m+p)s^2\ log\ m}{w} + \frac{ms^3}{w})$。

8 Subtask 10, 11

考虑怎么在线支持线性基的删除。

每个基向量和0向量都保存它是由哪些向量异或得来的。

在删除一个向量x时，查找0向量中是否存在包含x的，如果没有就找到线性基里位最低的包含x的，将它所保存的信息（由哪些向量异或得到）异或到其余所有含x的向量的信息里即可。容易发现这个做法是正确的。

时间复杂度$O(\frac{n^2m}{w})$。

此外，数据随机的部分，因为秩很大，0向量的数量是很少的，对于无法完整处理删除的可以只动态维护线性基，每次将0向量暴力重新插入，或者使用其他针对性算法。