$$\sum_i \binom{k+i-1}{i}(1-p)^i p^k (k+i) = \frac{k}{p}$$

首先：

$$\begin{aligned}&\sum_i \binom{k+i-1}{i}(1-p)^i p^k (k+i)\\ =&\ kp^k \sum_i \binom{k+i}{i}(1-p)^i\end{aligned}$$

根据二项式定理有：

$$(1-x)^{-r} = \sum_i \binom{r+i-1}{i} x^i$$

令$x = 1-p, r = k+1$，得到：

$$p^{-k-1} = \sum_i \binom{k+i}{i}(1-p)^i$$

因此：

$$\begin{aligned}&kp^k \sum_i \binom{k+i}{i}(1-p)^i\\ =&\ kp^k p^{-k-1}\\ =&\ \frac{k}{p}\end{aligned}$$

《复读机》解题报告

题目大意

将k种不同颜色的球放置在一个长度为n的序列上，每种球的个数都要是d的倍数，问总共有多少种不同的方案。

subtask 1

显然任何一种放置方案都是合法的，直接输出k^n即可。

subtask 2

考虑直接DP求出方案数。设$f[i][j]$表示考虑了前i种颜色的球，共占用了j个位置的方案数，则：

$$f[i][j] = \sum_{p=0}^{j}[d|p] \times f[i-1][j-p] \times \binom{j}{p}$$

时间复杂度$O(n^2k)$，可以通过第二个子任务。

subtask 3

题目等价于求：

$$\sum \frac{n!}{\Pi_{i=1}^{k}(a_i!)}$$

其中a_i是偶数。考虑用生成函数解决问题，答案就是：

$$(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!})^k \times n!$$

的n次项系数。注意到：

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \times \frac{x^i}{i!}$$

所以，答案就是：

$$(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^k \times n! \quad (\bigstar)$$

的n次项系数。将上式二项式展开，得到：

$$n! \times \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \times e^{ix} \times e^{(i-k)x}$$

$$n! \times \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \times e^{(2i-k)x}$$

而$e^{(2i-k)x}$的n次项系数是$\frac{(2i-k)^n}{n!}$，其中的$\frac{1}{n!}$恰好可以和式子最左边的$n!$抵消。所以，答案就是：

$$\frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \times (2i-k)^n$$

subtask 4

同样考虑生成函数。答案就是：

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{3i}}{(3i)!})^k \times n!$$

的n次项系数。

有一个(曾经)比较冷门的trick，叫单位根反演。大概是这样：

$$[n|k] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{ki}$$

可以这样证明：若$n|k$，则$\omega_n^{ki} = 1$，等式成立。反之，有：

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{ki} = \frac{\omega_n^0(1-(\omega_n^1)^n)}{1-\omega_n^1} = 0$$

注意到$19491001 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 73 \times 89 + 1$，即$mod - 1$是3的倍数，故存在三次单位根$r$。由单位根的定义知，$r = R^{\frac{mod-1}{3}}$，其中$R$是$mod$的一个原根。运用单位根反演，有：

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{3i}}{(3i)!} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i \times [3|i]}{i!} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i \times (r^0 + r^i + r^{2i})}{i!} = \frac{e^x + e^{rx} + e^{r^2x}}{3}$$

所以，答案就是：

$$n! \times (\frac{e^x + e^{rx} + e^{r^2x}}{3})^k$$

的n次项系数。大力展开得：

$$n! \times \frac{1}{3^k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k}{i} \times \binom{k-i}{j} \times e^{xi} \times e^{xjr} \times e^{xr^2(k-i-j)}$$

类似subtask 3。将e^x展开之后可以发现，$n!$同样能和n次项系数的分母约去。所以，答案就是：

$$\frac{1}{3^k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k}{i} \times \binom{k-i}{j} \times (i + jr + (k-i-j) \times r^2)^n$$

其实，这个子任务中所用到的“单位根反演”的trick可以看成上一个子任务中(★)式的推广。从另一个角度看，-1不就是二次单位根吗？

《蓝宝石》解题报告