人类的本质
解题报告

巴蜀中学 陈彦儒

2018 年 10 月 27 日

1 题目大意

实际上就是求：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{x_1,x_2\dots x_k=1}^{i} lcm(gcd(i,x_1),gcd(i,x_2)\dots gcd(i,x_k)) \bmod (10^9+7)$$

其中$1\le n,k\le 10^9, 1\le n*k\le 10^9$。

2 k有特殊限制的解法

2.1 Subtask 1 $n\le 10^6, k=1$ 5pts

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{x=1}^{i} gcd(i,x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\phi(d)\frac{i}{d}=\sum_{d=1}^{n}\phi(d)f(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$$

其中$f(n)=\frac{n*(n+1)}{2}$，线性筛预处理出$\phi(d)$即可。

2.2 Subtask 2 $n\le 10^9, k=1$ 5pts

使用杜教筛或min_25筛等方法快速计算$\phi(d)$前缀和，整除分块即可。

2.3 Subtask 3 $n \le 10^6, k = 2$ 7pts

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{x=1}^{i}\sum_{y=1}^{i} lcm(gcd(i,x), gcd(i,y)) \tag{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{x=1}^{i}\sum_{y=1}^{i} \frac{gcd(i,x) * gcd(i,y)}{gcd(i,x,y)} \tag{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x=1}^{i}\sum_{y=1}^{i}[gcd(i,x,y) == k] * gcd(i,x) * gcd(i,y) \tag{3}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{x=1}^{i}\sum_{y=1}^{i}\sum_{d|gcd(i,x,y)} \mu(d) * gcd(i,x) * gcd(i,y) \tag{4}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{d=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor} \mu(d) d^2 \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor}\sum_{x=1}^{i}\sum_{y=1}^{i} gcd(i,x) * gcd(i,y) \tag{5}$$

$$= \sum_{T=1}^{n} T * f(\lfloor\frac{n}{T}\rfloor) \sum_{d|T} d\mu(d) \tag{6}$$

其中$f(n) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{x=1}^{i} gcd(i,x))^2$，注意到$f(n)$是一个积性函数前缀和的形式，使用线性筛预处理即可。

2.4 Subtask 4 $n \le 10^9, k = 2$ 8pts

用min_25筛预处理积性函数的前缀和，整除分块即可。

3 k无特殊限制的解法

3.1 Subtask 5 $n \le 10^7$ 35pts

当k大于2时无法通过简单的反演将lcm进行化简，注意到$gcd(x,i)$为i的约数，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{x_1,x_2\dots x_k=1}^{i} lcm(gcd(i,x_1),gcd(i,x_2)\dots gcd(i,x_k)) \tag{7}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x_1,x_2\dots x_k=1}^{i}\frac{i}{gcd(\frac{i}{gcd(i,x_1)},\frac{i}{gcd(i,x_2)}\cdots\frac{i}{gcd(i,x_k)})} \tag{8}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x_1,x_2\dots x_k|i}\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_k)\frac{i}{gcd(x_1,x_2\dots x_k)} \tag{9}$$

记$f(i)=\sum_{x_1,x_2\dots x_k|i}\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_k)\frac{i}{gcd(x_1,x_2\dots x_k)}$，容易发现$f$为积性函数。[1]

当$i=p^k$，

$$f(i)=\sum_{x_1,x_2\dots x_d=1}^{i} lcm(gcd(p^k,x_1),gcd(p^k,x_2)\dots gcd(p^k,x_d)) \tag{10}$$

$$=\sum_{x_1,x_2\dots x_d=0}^{k} p^{\max\{x_1,x_2\dots x_d\}}\prod_{j=1}^{d}\phi(p^{k-x_j}) \tag{11}$$

按照$\max\{x_1,x_2\dots x_d\}$分类计算。

令$g(mx)=\sum_{x_1,x_2\dots x_d=0}^{mx}\prod_{j=1}^{d}\phi(p^{k-x_j})=(\sum_{x=0}^{mx}\phi(p^{k-x}))^d$

则容易看出

$$g(mx)=\begin{cases}(p^k-p^{k-1-mx})^d & \text{if } 0\le mx\le k-1,\\ p^{kd} & \text{if } mx=k.\end{cases}$$

$$f(p^k)=\sum_{mx=0}^{k}p^{mx}(g(mx)-g(mx-1))$$

进一步可以得到$f(p^k)\to f(p^{k+1})$的递推式

$$f(p^{k+1})=p^d f(p^k)+(1-\frac{1}{p})(p^{(k+1)(d+1)}-p^{k+1}(p^{k+1}-1)^d)$$

于是可以线性预处理出$f(i)$

[1]为了表达的方便，以下内容中用d代替题面中的k

3.2 Subtask 6 40pts

考虑使用min_25筛优化这个过程

$$
\begin{aligned}
f(p) &= p^{d+1} - (p-1)^{d+1} && (12) \\
&= -\sum_{i=0}^{d}(-1)^{(d+1-i)}\binom{d+1}{i}p^i && (13)
\end{aligned}
$$

于是可以在$O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{log(n)}d)$内求出答案。结合上一部分的算法即可通过所有子任务。

4 总结

本题是一道数学题，考察了选手对于筛法，反演，和式变换等的运用。题面切合实际背景，解法比较自然。设置了较为详细的部分分，有一定的区分度。