

《不可名状》解题报告

东北师范大学附属中学 李天晓

【题目描述】

有一个未知的数 x 满足 $x \in \mathbb{C}, |x| = 1$ 。

通过在一个无法直接查询的复数序列上做一些与 x 有关的玄学操作得到 x 的值。

【数据范围】

见题面描述。

【子任务 1】

考虑简单构造一下令 QR 在 $x = 1$ 时返回 0， $x = -1$ 时返回 1。

先调用一次 CR 或 ACR 把 a_0, a_1 变成 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，令 $a_1 = xa_1$ ，再令 a_0 为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的两者之和， a_1 为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的两者之差。

【子任务 2】

在多次询问的情况下沿用子任务 1 的方法，如果 QR 一直返回 0，那么 x 大概率为 1，一直返回 1 则 x 大概率为 -1。

除此之外的情况，将 CR 的矩阵改成 $\begin{bmatrix} 1 & \omega_{\max}^{-i} \\ 1 & -\omega_{\max}^{-i} \end{bmatrix}$ （为方便叙述，下文的矩阵省略使其满足 $AA^* = I$ 的常数系数）便可以区分 ω_{\max}^i 和 $-\omega_{\max}^i$ ，在 $\max = 8$ 的情况下正确率很高，实在不行多交几次也可以。

【子任务 3】

令 $x = \omega_{512}^{x'}$ ，因为询问只能调用一次，考虑构造一下令最终的 $a_{x'}$ 为 1，其余为 0。发现唯一与 x' 的值有关的 CU 操作可以对某一位乘上 $\omega_{512}^{x'}$ ，而 DFT 矩阵的 $\sqrt{\frac{1}{2^n}}$ 倍是满足 $AA^* = I$ 的，尝试对最终状态 DFT，得到 $a_i = \sqrt{\frac{1}{2^n}} \omega_{512}^{ix'}$ 。 $a_i = \sqrt{\frac{1}{2^n}}$ 可以简单地由初始状态构造出来，对于每一位做一次 $CU(i, 2^i)$ 再 IDFT 回去就可以了。

【子任务 4】

既然能 DFT 就能 FFT，对于较大的 n ，ACR 无法调用，尝试用 CR 模拟 FFT。其过程就是对于每一个 i ，对第 i 位为 0 的 j 和 $j + 2^i$ 做一次 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_{2^i}^j & -\omega_{2^i}^j \end{bmatrix}$ 。因此可以用 CR 的 d_1 限制 j 的某一位， d_2 限制 i ，对第 i 位为 0 的 j 和 $j + 2^i$ 做 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^{i-j}} \end{bmatrix}$ ，这样在枚举所有 j 后， j 位的矩阵即 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^i}^j \end{bmatrix}$ ，在此之前对第 j 位做 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 即可。其余部分与子任务 3 相同，总操作数在 n^2 级别。