《观众小P》命题报告

安徽师范大学附属中学 贾昊瑞

1 题意简述

现有一场 2^n 个人参加的石头剪刀布比赛，选手在比赛中只会使用他的偏爱手势。

比赛分为 n 轮，在每轮中，第 0 位选手和第 1 位选手对战，胜者作为新的第 0 位选手，第 2 位和第 3 位对战，胜者作为新的第 1 位选手，以此类推。

如果一次对战的双方的偏爱决策相同，那么这次对战就永远不会结束。

现已知偏爱每种决策的选手数目，求字典序最小的，能够决出最终胜负的初始次序。

输出答案的$hash$值以及其中要求的一段。

2 限制和约定

$1 \le n \le 300000,\ 0 \le r - l \le 300000,\ R + S + P = 2^n$。

3 算法介绍

3.1 算法1

暴力枚举所有可能的初始状态，按照题意模拟判断。

复杂度 $O\left(\frac{16!}{5!5!6!} \times 16\right)$，期望得分 3 分。

3.2 算法2

发现知道石头剪刀布个数，我们就能知道有多少对 ‘RS,SP,PR‘ 比赛，所以每一轮剩下的人数是固定的。

我们记录下当前层，最终胜者为 ‘RSP‘ 的分别有多少个，以及每个人所对应的序列。

到一层的时候，我们不断选出当前字典序最小，手势不同，并且其余的人可以全部比出胜负的人，让他们比赛，合并起来，进入下一层。

若可以比出只剩一个人，那么他对应序列即为答案。

复杂度 $O(2^n \times n)$，期望得分 22 分。

3.3 算法3(原题做法)

石头剪刀布的胜负规则是确定的，所以我们只要知道赢家的手势，就可以推出比赛双方的手势分别是什么。

我们枚举最终胜利的人手势是什么，然后递归到下一层求出下一层两边的最优答案，合并起来即可。

复杂度也能做到 $O(2^n \times n)$，期望得分依旧 22 分。

3.4 算法4

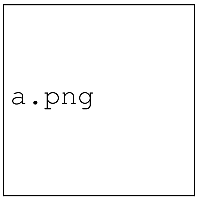
由算法 3 的过程，其实我们需要求得的就是当前有 2^i 个人，最终胜利者手势为 ‘R/S/P‘ 的序列。

我们可以改变一下求解顺序，自底向上考虑，用 2^i 个人的状态推导 2^{i+1} 个人的状态即可。例如我们需要知道 16 人胜利为 R 的序列，只需要比较一下 8 人胜利者为 ‘R‘ 和 8 人胜利者为 ‘S‘ 的序列字典序，较大的接在较小的后面即可。

复杂度 $O(2^n \times n)$，期望得分还是 22 分。

3.5 算法5

在算法 4 的基础上，我们不再记录整个序列，而是记录最优是由下一层哪两个合并起来的，建立成一种类似二叉树的结构。左子树为构成当前序列的下一层序列中靠左的一个。



（图为第一层结构。）

我们需要比较两个序列的时候，我们先看两个根的左子树是否相同，不同则递归比较左子树，否则比较右子树即可，复杂度 $O(n^2)$。

有了树结构，求 hash 值可以做到 $O(n)$

判断是否 1 可行以及求得最终胜利者，可以用高精度记录每一层，每种手势为根的时候，初始三种手势的数量，复杂度 $O(n^2)$。

查找最终序列某一个位置的人可以顺着树结构搜索下去，总复杂度 $O(n \times (r - l + 1))$。

复杂度 $O(n^2/n \times (r - l))$，期望得分 55 分。

3.6 算法6

我们继续优化算法 5。

首先优化比较，我们发现比较的时候递归比较的左右子树之间的大小关系其实是已知的，所以我们记录下每一层的时候三种手势为根的序列，两两之间的大小关系即可。这样就优化到 $6n$，（6 是 C_3^2）。

再考虑优化高精度。仔细思考一下，发现，三个数之间的大小关系只有 $3! = 6$ 种，所以最多六层就会出现循环（实际发现，就是 6 层一循环），所以求出树结构的复杂度就变成了常数。

通过打表/推导发现若要有解，三种手势数量都是 $\dfrac{2^n}{3}$ 的上下整。这等价于S, P的数目和R数目差值小于等于1。

我们归纳证明这一个结论：

在2^0个人的时候，假设R胜利，则R, S, P数目分别为$(1, 0, 0)$，满足条件。

设所有合法2^k人状态都满足条件满足条件，一个2^{k+1}人的装态显然是由两个不同的2^k人状态合并而来。因为'RSP'三者显然等价，所以相等于一个$(\pm1, 0, 0)$与一个$(0, \pm1, 0)$合并，能得到一个$(\pm1, \pm1, 0)$，即一个$(0, 0, \mp1)$，依然成立。

而 $\dfrac{2^n}{3}$ 的上下整只会在个位有所区别。因为否则的话必然有上整 $x \equiv 0 \pmod{10}$，下整 $y \equiv 9 \pmod{10}$，那么 $2^n \equiv 2x + y$ or $2y + x \equiv 28$ or $29 \pmod{30}$，显然矛盾，因为 2 的次幂 mod30 是 $2, 4, 8, 16$ 的循环。所以比较时只需要比较最后一位即可。

而且通过 n 以及与另两个不同的手势是哪一个就可以推出最终胜利的手势。

我们同样可以通过与上面同样的归纳法得知，最终胜利的手势就是与另两者不同的手势后推n次得到的手势。

如有2048人，'RSP'个数分别为$(682, 683, 683)$，这时候'R'的数量与'S/P'不同，胜利者就是'R'往后推 11 次也就等价于往前推 1 次所得到的手势'P'。

复杂度 $O(n)$（读入和判断前若干位是否相同的时间）。

求解序列 l 到 r 的时候其实我们并不需要每次重新从根出发，只需要倒退二进制位中变化的那几位即可。

这么做的运算次数，相当于我们有一个l，每次+1直到它变为r的总变化位数。

连续加法时，第i位每2^i次运算变化一次，总的变化位数大概是 $\sum_{i=0}^{n-1} 1 + \dfrac{n}{2^n} = O(n + r - l)$ 的，所以这一部分复杂度也可以接受了。

至此，本题的总复杂度即为 $O(n + (r - l))$，期望得分 100 分。

PS：$O(n)$ 题，数据范围放 3×10^5 ，是不是很良心啊。

4 数据生成方式

本题数据读入量较小，输入量是否随机与做法无较大关联，所以数据除'R/S/P'以外都是在合理范围内随机得到。'R/S/P'三个数都是$\dfrac{2^n}{3}$ 左右（大概没有超过±2），除每个测试包10个点的第1个以外均有合法解。

5 命题过程及总结

本题改编自一道 NOIP 题，原题要求解的是整个序列，标解是算法 3。

出题人思考中发现可以改变求解的顺序，在进行模型转化将树结构变为自动机结构，优化了预处理的复杂度。

然后改变了需求解的东西，数据范围就加了 4 个 0。

而且我们发现树的结构有较小的循环节，若把题意改变成已知最终胜利者，只需要求 $hash$ 值，不知道能不能用倍增或快速幂等 poly(log) 级做法求得，（那样就可以再加 10 个 0 啦（划掉）），反正傻逼出题人还没有想出来解决方案，欢迎同学们有思路以后与我讨论。