

子任务 1

搜索。

子任务 2

$n = m$ 时，挺好序列都是长度为 n 的排列。

如果设 $f[i]$ 表示 $n = m = i$ 时的答案，那么枚举最大值的下标， $f[i] = \sum_{j=1}^i f[j-1] \cdot f[i-j]$ 。这正是卡特兰数的递推式，可以发现 $n = m$ 时的答案就是卡特兰数。

$S = \{X \mid \text{序列 } X \text{ 长度为 } n, \text{ 序列 } X \text{ 中的每个数都是 } 1 \text{ 到 } n \text{ 内的整数, 所有 } 1 \text{ 到 } n \text{ 内的整数都在序列 } X \text{ 中出现过, 且序列 } X \text{ 不为 } 1\ 2\ \dots\ n\}$

$T = \{X \mid \text{序列 } X \text{ 长度为 } n, \text{ 序列 } X \text{ 中的每个数都是 } 1 \text{ 到 } n-1 \text{ 内的整数, 且所有 } 1 \text{ 到 } n-1 \text{ 内的整数都在序列 } X \text{ 中出现过}\}$

如果把同构的序列都视为相同的，可以证明 $S = T$ 。

对于 T 中任意一个序列 X ，在同构的前提下，保持不同权值的数之间的相对大小的同时，可以把权值相同的数按下标顺序替换成权值不同的数，例如 $1\ 2\ 3\ 3\ 4\ 5$ 可以替换成 $1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6$ 。设替换后的序列为 Y ，显然 Y 中有 1 到 n 所有数，且至少有 1 个逆序对，因此 $Y \in S$ ，即 $X \in S$ 。对于任意 $X \in T$ ，均有 $X \in S$ ，这说明 $T \subseteq S$ 。

同理，对于 S 中任意一个序列 X ，由于 X 不为 $1\ 2\ \dots\ n$ ，所以一定存在 i 和 j 满足 $i < j$ 且 $X[i] = X[j] + 1$ ，那么就可以把 $X[i]$ 和 $X[j]$ 替换为相同的数，即 $X \in T$ ， $S \subseteq T$ 。

这样就证明了 $S = T$ 。 n 相同时， $m = n - 1$ 的答案恰好比 $m = n$ 的答案少 1 。

子任务 3

显然 $n < m$ 时答案为 0 ，接下来考虑 $n \geq m$ 的情况。

$A = \{X \mid \text{序列 } X \text{ 长度为 } n, \text{ 序列 } X \text{ 中的每个数都是 } 1 \text{ 到 } m \text{ 内的整数}\}$

$B = \{X \mid \text{序列 } X \text{ 长度为 } n, \text{ 序列 } X \text{ 中的每个数都是 } 1 \text{ 到 } m \text{ 内的整数, 且序列 } X \text{ 中的最大值为 } m\}$

$C = \{X \mid \text{序列 } X \text{ 长度为 } n, \text{ 序列 } X \text{ 中的每个数都是 } 1 \text{ 到 } m \text{ 内的整数, 且所有 } 1 \text{ 到 } m \text{ 内的整数都在序列 } X \text{ 中出现过}\}$

容易发现要求的就是 $|C|$ 。

接下来证明 $n \geq m$ 时, $A = B = C$ 。

首先证明 $A = B$ 。对于 A 中任意一个序列 X , 若 X 中的最大值为 p , 那么把 X 中的每个数都加上 $m - p$, 得到序列 Y , 显然 X 和 Y 同构, 即 $X = Y$ 。 Y 中最大值为 m , 即 $Y \in B$ 。对于任意 $X \in A$, 均有 $X \in B$, 这说明 $A \subseteq B$ 。而 $B \subseteq A$ 是显然的, 因此 $A = B$ 。

可以利用类似的方法证明 $A = C$ 。对于 A 中任意一个序列 X , 可以在同构的前提下, 保持不同权值的数之间的相对大小的同时, 把权值相同的数按下标顺序替换成权值不同的数。这样在 $n \geq m$ 时, 通过上述替换, 可以使 X 中出现过的数增加至 m 种。对于任意 $X \in A$, 均有 $X \in C$, 这说明 $A \subseteq C$ 。 $C \subseteq A$ 也是显然的, 因此 $A = C$ 。

现在已经证明了 $A = B = C$, 可以利用这个结论进行 dp。

令 $f[i][j]$ 表示 $m = i, n = j$ 时的 $|A|$ 。考虑怎样计算某个 $f[i][j]$ 。因为 $|A| = |B|$, 可以考虑计算 $|B|$ 。那么最大值为 i , 枚举下标最小的 i 的下标。

$$f[i][j] = \sum_{k=1}^j f[i-1][k-1] \cdot f[i][j-k]$$

因为 $|A| = |C|$, 所以 $f[m][n]$ 就是答案。时间复杂度 $O(mn^2)$ 。

子任务 4

设生成函数 $F[i] = \sum_{j \geq 0} f[i][j] \cdot x^j$ 。易知 $F[i] \cdot F[i-1] + I = F[i]$, 即 $F[i] = \frac{I}{I - x \cdot F[i-1]}$ 。

用多项式求逆加速递推, 时间复杂度 $O(mn \log n)$ 。

或者每隔 B 行打一个表, 时间复杂度 $O(Bn^2)$, 代码中需记 $\frac{nm}{B}$ 个数。

子任务 5

$F[0] = I, F[i] = \frac{I}{I - x \cdot F[i-1]}$, 可以用大家在高中学到的特征根法求数列通项。

$$F[n] = \frac{-(-I - \sqrt{I-4x})^n + (I + \sqrt{I-4x})^n + (-I - \sqrt{I-4x})^n \sqrt{I-4x} + (I + \sqrt{I-4x})^n \sqrt{I-4x}}{-(-I - \sqrt{I-4x})^n + (I + \sqrt{I-4x})^n + (-I - \sqrt{I-4x})^n \sqrt{I-4x} + (I + \sqrt{I-4x})^n \sqrt{I-4x} + 2x(I - \sqrt{I-4x})^n - 2x(I + \sqrt{I-4x})^n}$$

用多项式求逆, 多项式开方等算法计算即可。求多项式的 n 次幂, 可以用快速幂, 常数较好的可以通过; 也可以利用 $A^n = e^{n \ln A}$, 用多项式 \ln 和多项式 \exp 计算。时间复杂度 $O(n \log n)$ 或 $O(n \log n \log m)$ 。