Solution of 圆形

题目简述

在一个白色的平面上进行若干次操作，每次把一个给定的圆涂成黑色，每次操作后输出黑色部分的面积。

算法 1：分类讨论

对于子任务 1，$n \leq 2$，问题转化为求两圆的并的面积。

两圆只会出现以下情况：

- 两圆相离（或外切）
- 一个圆包含另一个圆（或内切）
- 有两个交点

对于其中的每一种情况，都可以用简单的方法求解，时间复杂度 $O(1)$。
可以通过子任务 1，获得 18 分。

算法 2：特殊性质

对于子任务 3，$r = 1$，同时注意到圆心一定是整点。

在完成前 k 次操作后，定义一个整点 `被操作`，当且仅当前 k 次操作中存在一个圆以它为圆心。

用线段连接平面上所有距离为 1 的整点对，这些线段将平面划分成无限个 1×1 的正方形。每一个正方形内部黑色部分的面积只与其四个顶点是否 `被操作` 有关，把这信息称作正方形的 `状态` 。

每一次操作只会改变圆心周围四个正方形的状态，直接维护所有不全是白色的正方形的状态，以及黑色部分面积。时间复杂度 $O(n)$。
可以通过子任务 3，获得 13 分；结合算法 1 可获得 31 分。

算法 3：扫描线

对于子任务 2，$n \leq 30$。

原问题可以转化为 n 次求解静态问题，即输出所有操作完成后的黑色部分面积。下面考虑如何快速解决静态问题。

定义一条平行于 Y 轴的直线是 `关键线`，当且仅当线上至少存在一点是 **某两个圆的交点** 或是 **某个圆上 x 坐标最小或最大的点**。

所有 `关键线` 将平面划分成了 $O\left(n^2\right)$ 个区域，每个包含黑色部分的区域拥有左右边界，每个区域内的所有圆弧不交且贯穿左右边界。

在一个区域内，每一段黑色部分都以区域内的两条圆弧作为其上下边界。将区域内所有圆弧按从低到高排序，求出每一段黑色部分的上下边界，从而可以计算每一段黑色部分的面积。

对每一个静态问题分别求解，时间复杂度 $O\left(n^4 \log n\right)$。

可以通过子任务 $1, 2$ ，获得 33 分；结合算法 2 可获得 46 分。

算法 4：积分法

对于子任务 4，$n \leq 200$。

依旧转化为 n 次求解静态问题。

注意到黑色部分是若干个闭区域的不交并，而闭区域的面积可以用格林公式计算。用特殊函数代入格林公式得到

$$\iint_D dx\,dy = \oint_L y\,dx$$

其中 D 是一个闭区域，L 是其有向边界。它告诉我们，闭区域的面积等于上边界的积分减去下边界的积分。闭区域的不交并的面积也可以如此计算。

黑色部分的边界的是由圆弧组成的。去除重复的圆之后，每一段圆弧恰好属于一个圆。

圆的边界上一点属于黑色部分的边界，当且仅当它不被任意其他一圆包含，定义这些部分为这个圆的 `黑色边界部分`。

对于每一个圆，其黑色边界部分可以在 $O(n \log n)$ 的时间内计算得到。取这些部分的积分，根据它是上边界还是下边界来定正负号，再代数相加，即可得到答案。

对每一个静态问题分别求解，时间复杂度 $O\left(n^3 \log n\right)$。
可以通过子任务 $1, 2, 3, 4$ ，获得 71 分。

算法 5：动态积分

对于子任务 5，$n \leq 2000$。

在算法 4 的基础上，用基础数据结构（比如平衡树、线段树）维护每一个圆的黑色边界部分。新加入一个圆 A 的时候，A 的黑色边界部分可以在 $O(n \log n)$ 的时间内计算；对于其他每一个圆 B，B 的边界可能会被 A 覆盖一部分，这部分一定是连续的一段，在数据结构上修改。

总时间复杂度为 $O\left(n^2 \log n\right)$。
可以通过全部子任务，获得满分。