不讲武德 命题报告

王泽远

2020.10

Contents

1 试题来源

本题为笔者的原创题，曾经作为校赛（NFLSPC）压轴题在比赛中出现，读者仍然可以通过 https://acm.nflsoj.com/problem/684 提交本题。

2 题目大意

给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图，每条边有两个权值 a_i, b_i，你需要对于每个 $k(1 \le k < n)$ 求出选出 k 条不成环的边使得这些边 $(\sum a_i)(\sum b_i)$ 最小。

3 数据范围

$n, m \le 1500$

4 解题过程

做法 1

直接 $O(2^n)$ 枚举选的边即可。可以获得 10 分。

做法 2

考虑 HNOI2014 画框的做法。

先枚举 k，不难发现如果把所有方案画在平面上，即一个方案对应平面上 (不和谐度总和, 亮度总和) 的点，那么能够对答案产生影响的点必然在下凸壳上。

我们先分别找到不和谐度总和最小的点、以及亮度总和最小的点，这两个点必然在下凸壳上。然后离这两个点连成线段下方的最远点也必然在凸壳上。

以此类推，我们定义一个递归函数 $\text{divide}(l, r)$ 表示当前最左边的点是 l，最右边的点是 r。此时我们要找到在线段 l, r 下方最远的点，设其为 p，那么相当于最大化

$(p-l)\times(r-l)$，这里的乘法是向量叉积。

暴力展开之后，大概是 $(p_x-l_x)(r_y-l_y)-(p_y-l_y)(r_x-l_x)=p_x(r_y-l_y)-p_y(r_x-l_x)+d$，其中 d 是关于 l,r 的常数。

所以一条边 i 的代价此时就是 $a_i(r_y-l_y)-b_i(r_x-l_x)$，从大到小排序之后贪心选出 k 条不成环的边即可，这样可以保证 p 在凸包上，然后递归成 $\text{divide}(l,p)$ 和 $\text{divide}(p,r)$ 即可。特别的，如果 p 在线段 l,r 上，那么就不递归了。

最后拿所有凸包上的点更新一遍答案，由于这个凸包上的点限制很严格，可以理性感知一下凸包点数大概是 $O(n)$ 的（总共 2^n 个点），每次找最远点复杂度是 $O(n\log n)$，枚举 k 也要 $O(n)$，总复杂度是 $O(n^3\log n)$，可以通过 subtask3。

实际上对于 subtask2，由于输入是一棵树，因此不需要考虑最小生成树的限制（即不成环），每次只需要使用 kth_element 选出前 k 大即可，复杂度 $O(n^3)$，可以通过 subtask2。

综上，做法 2 的思想总共可以获得 40 分。

做法 3

没有无环限制的部分

根据做法 2，答案必然在下凸壳上，因此必然可以找到一条经过答案的直线（斜率为负）使得这条直线不经过其它任何点，即固定这样的斜率对每个点都做一条直线，这条直线在 y 轴上的截距最小。

因此考虑 “枚举” 直线的斜率，算出在 y 轴上截距最小的直线。此时截距相当于个 (a_i,b_i) 向量在这条直线的方向下，y 轴上投影的长度和。

即假设直线斜率为 k，(a,b) 在 y 轴上的投影长度为 $b-ak$（注意 $k<0$）。因此可以看作是截距为 b，斜率为 a 的直线，在 $x=-k$ 处的取值。

于是问题变成了有若干条直线，你需要枚举所有实数 x_0，并取 $x=x_0$ 时最下方的 k 条直线来更新答案。由于交点只有 $O(m^2)$ 种，因此相对大小关系只会改变 $O(m^2)$ 次，每次交换相邻两条直线，直接维护答案即可。

有无环限制的部分

但是上面并没有考虑无环的限制，所以只能通过 subtask4 的 15 分。

由于最小生成树算法，答案也是贪心选最小的不成环的 k 条边，因此我们还是可以试图维护交换的，只不过需要分类讨论。假设当前交换的是排名第 i 和 $i+1$ 的直线。

1. i 和 $i+1$ 当前都被选在最小生成树中。由于交换之后显然他们两还是可以都选，那么和之前的类似，只有一个位置（i 位置）的前缀和会改变，$O(1)$ 维护即可。2. i 和 $i+1$ 当前都没被选在最小生成树中。这个也简单，直接交换之后当做无事发生。3. i 没被选在最小生成树里，$i+1$ 被选在最小生成树里了。一样的，交换之后当做无事发生。4. i 在最小生成树里，$i+1$ 不在。这个情况就复杂一些了。如果断掉 i 这条边，$i+1$ 刚好能连接这两个连通块，那么就连上 $i+1$；否则就不连上 $i+1$。但是如果删掉 i，连上 $i+1$ 的话，那么所有后面位置的前缀和都会改变，就需要整个遍历更新一遍。同时，如果暴力判断能否连上 $i+1$ 这条边的话，也需要遍历整棵树。

由于情况 4 的限制，我们可以 $O(n^3)$ 比较暴力的做这个问题，可以通过 subtask5 的 15 分。因此这个做法目前可以获得 70 分。

更好的复杂度分析

引理： 最小生成树发生改变的次数不超过 $O(n\sqrt{n})$ 次。即 4 情况中断开 i 连上 $i+1$ 的情况不会超过 $O(n\sqrt{n})$ 次。

证明： 我们弱化这个问题。平面上有 n 条直线，每条直线初始时有一个 0 或 1 的权值。每次如果 i,j 两条直线相交（令 i 的斜率小于 j 的斜率），我们可以选择不改变他们的权值；或者如果此时 i 的权值为 1，j 的权值为 0 时，我们可以选择交换他们的权值（其实 1,0 就分别代表其当前在 MST 里或者不在 MST 里）。我们可以证明，无论如何安排权值，能够产生交换的次数不超过 $O(n\sqrt{n})$ 次。

继续弱化这个模型，我们有一张无环的竞赛图，有 n 个点，每个点初始有一个 0 或 1 的权值，我们每次可以选择一条边 $u \to v$，如果此时 v 的权值是 1 且 u 的权值是 0，那么我们可以选择交换他们的权值。问最多能够产生多少次交换。实际上这个

模型中，每条边对应原来两条直线的一个交点（从斜率大的连向斜率小的），由于任意两条直线仅有一个交点，所以每条边只能使用一次。

考虑这张竞赛图的拓扑序，先扔掉所有跨度 $\leq \sqrt{n}$ 的边（即两个端点在拓扑序中相隔的距离 $\leq \sqrt{n}$），这样的边至多有 $O(n\sqrt{n})$ 条；剩下的边操作一次，会让一个 1 前进至少 $\sqrt{n}$ 步，因此总共最多产生 $O(\frac{n^2}{\sqrt{n}} + n\sqrt{n}) = O(n\sqrt{n})$ 次交换。

我们每次弱化模型，都保证原来模型的任意变化方案都严格被包含在后一个模型中，因此最小生成树发生改变的次数不超过 $O(n\sqrt{n})$。

证毕。

事实上这个上界似乎很松（随机数据下改变次数是 $O(n)$ 的），而且出题人没办法卡到这个上界。（有论文 [1] 说明这个界应该介于 $O(m\alpha(n))$ 和 $O(mn^{\frac{1}{3}})$ 之间）

于是我们在每次改变 MST 的时候暴力修改所有后面位置的前缀和，复杂度就是对的。至于切断 i，判断 $i+1$ 两个端点是否所处同一个连通块，连接 $i+1$，LCT 完成即可。当然也可以每次改变 MST 的时候暴力重构树链剖分，应该也可以。

总复杂度 $O(n^2 \log n + n^2\sqrt{n})$。期望得分 100 分。

5 总结与展望

本题融合了最值问题、计算几何、数据结构以及复杂度分析的多种问题，需要选手对于最值问题转化为几何问题非常熟练，并且在复杂度比较松的时候大胆猜想，证明更优的上界。

每个部分都需要选手对于该部分的掌握非常熟练，考研了选手的综合分析能力。

6 参考资料

[1]T. K. Dey.Improved bounds on planar k-sets and k-levels.Discrete & Computational Geometry.19 (1998), 373-382