以下不区分非负整数的二进制表示与集合。

# 算法 X

先来考虑 $A=\{1\}$ 应该如何做。我大致得到了两种解法，它们各自都可以推广到一般情况：

## I

直接考虑异或卷积，那么我们只需要计算 $[x^0t^n]\prod_{S=0}^{R-1}(1+tx^S)$。
做 FWT，可得答案为

$$2^{-L}[t^n]\sum_{T=0}^{2^L-1}\prod_{S=0}^{R-1}(1+(-1)^{|S\cap T|}t)$$

其中 $L=\lceil\log_2 R\rceil$。

我们考虑对于给定的 $T$ 如何计算 $\prod_{S=0}^{R-1}(1+(-1)^{|S\cap T|}t)$，也就是计算 $\sum_{S=0}^{R-1}[2\mid|S\cap T|]$。
考虑从高到低枚举数位，对于一个 $0\le i<m$，假设我们考虑 $a_{m-i}$ 位以上与 $R$ 相同，而 $a_{m-i}$ 位为 $0$ 的所有 $S$。
若 $T$ 在 $a_{m-i}$ 位以下都为 $0$，则无论怎么取都无法影响奇偶性，故方案数为 $[2\mid i]2^{a_{m-i}}$。
否则，可知各恰有一半的 $S$ 满足 $|S\cap T|$ 为奇数或偶数，方案数为 $2^{a_{m-i}-1}$。
因此，$\prod_{S=0}^{R-1}(1+(-1)^{|S\cap T|}t)$ 的结果只有 $O(m)$ 种。问题转化为对于给定的序列 $u,v$ 计算 $[t^n]\sum_k u_k(1+t)^{v_k}(1-t)^{R-v_k}$。

考虑展开二项式，可得

$$\begin{aligned}
&=\sum_k u_k\sum_{j\ge 0}\binom{v_k}{j}(-1)^{n-j}\binom{R-v_k}{n-j}\\
&=\sum_k u_k\sum_{j\ge 0}\frac{v_k^{\underline{j}}}{j!}(-1)^{n-j}\frac{(R-v_k)^{\underline{n-j}}}{(n-j)!}\\
&=\sum_k u_k\left(\sum_{j\ge 0}\frac{x^{\underline{j}}}{j!}\frac{(x-R)^{\overline{n-j}}}{(n-j)!}\Bigg|_{x=v_k}\right)
\end{aligned}$$

由于这是二维求和，所以可以直接多点求值，也可以交换求和号后计算其转置问题（幂和）。

时间复杂度 $O(m+n\log n\log m)$。

## II

考虑先进行斯特林容斥，钦定一些等价类，我们知道其容斥系数应该是带符号的第一类斯特林数。
则大小为奇数的等价类系数的 GF 为 $\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$，大小为偶数的等价类为 $\frac{\ln(1+t)+\ln(1-t)}{2} = \frac{1}{2}\ln(1-t^2)$。
我们不妨首先对于各个 $k$ 算出钦定了 $k$ 个大小为奇数的等价类的容斥系数和，即二元 GF

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{R}{2}(1-t^2)+\frac{u}{2}\frac{1+t}{1-t}\right) &= [t^n](1-t^2)^{R/2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{u/2} \\ &= [t^n](1-t^2)^{R/2}\sum_{j\geq 0}\binom{u/2}{j}\left(\frac{2t}{1-t}\right)^j \\ &= \sum_{j\geq 0}\frac{(u/2)^{\underline{j}}}{j!}\cdot[t^n](1-t^2)^{R/2}\left(\frac{2t}{1-t}\right)^j \\ &= \sum_{j\geq 0}\frac{(u/2)^{\underline{j}}}{j!}\cdot 2^j\sum_{k\geq 0}\binom{k-1}{j-1}[t^{n-k}](1-t^2)^{R/2}\end{aligned}$$

算出 $(1-t^2)^{R/2}$ 后，可以用一次卷积算出后面部分，然后分治 NTT 即可实现下降幂转普通幂。

得到容斥系数后，问题转化为选择 $k=1,\dots,n$ 个整数，但可以相同。
我们不妨继续考虑异或卷积

$$\begin{aligned}&[x^0]\prod_{S=0}^{R-1}(\cosh t + x^S\sinh t) \\ =\ & 2^{-L}\sum_{T=0}^{2^L-1}\prod_{S=0}^{R-1}(\cosh t + (-1)^{|S\cap T|}\sinh t)\end{aligned}$$

可以发现，这个问题相对于上一个问题的优点在于，$\mathrm{e}^t$ 是可以合并的。因此问题变为

$$\sum_k u_k \mathrm{e}^{v_k t} = \sum_k u_k\sum_{j\geq 0}v_k^j\frac{t^j}{j!}$$

这就是幂和的形式，其 OGF 就是 $\sum_k\frac{u_k}{1-v_k t}$。时间复杂度 $O(m+n\log n\log m)$。

# 算法 X+1

考虑推广。

## I

令 $A(t)=\sum_{k\in A}t^k$，$A_0(t)=\frac{1}{2}(A(t)+A(-t))$，$A_1(t)=\frac{1}{2}(A(t)-A(-t))$。
则开头的异或卷积形式就变成了 $[x^0t^n]\prod_{S=0}^{R-1}(1+A_0(t)+x^SA_1(t))$，FWT 后就是

$$2^{-k}[t^n]\sum_{T=0}^{2^k-1}\prod_{S=0}^{R-1}(1+A_0(t)+(-1)^{|S\cap T|}A_1(t))$$

即计算

$$\begin{aligned}&[t^n]\sum_k u_k(1+A(t))^{v_k}(1+A(-t))^{R-v_k}\\=&[t^n](1+A(-t))^R\sum_k u_k\left(1+\frac{2A_1}{1+A(-t)}\right)^{v_k}\end{aligned}$$

考虑拉格朗日反演

$$\begin{aligned}&[t^n](1+A(-t))^R\left(1+\frac{2A_1}{1+A(-t)}\right)^k\\=&[t^n](1+A(-t))^R(1+2H)^k\qquad\left(H=\frac{A_1}{1+A(-t)}\right)\\=&[t^n](1+A(-H^{\langle -1\rangle}))^R(1+2t)^k(H^{\langle -1\rangle})'\left(\frac{t}{H^{\langle -1\rangle}}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

我们将与 $k$ 无关的部分设为 $P(t)$。计算 $H^{\langle -1\rangle}$ 可以牛顿迭代或半在线卷积，时间复杂度 $O(cn\log n)$ 或 $O\left(\frac{cn\log^2 n}{\log\log n}\right)$，计算复合的复杂度类似。

则问题就是

$$\sum_k u_k[t^n]P(t)(1+2t)^{v_k}=\sum_k u_k\sum_{j\geq 0}2^j\binom{v_k}{j}[t^{n-j}]P(t)$$

转普通幂多项式后依然有多点求值和幂和两条路。

## II

这一种做法只需要修改容斥系数。初见令人疑惑的是斯特林容斥刻画的有标号结构如何处理无标号选数的问题，但注意到我们可以给大小为 $k$ 的等价类带上 $k!$ 的权值，这样就强行去除了标号。
那么，这里的容斥单位就是 $\ln(1+A(t))$。我们需要计算

$$
\begin{aligned}
&[t^n][(1+A(t))(1+A(-t))]^{R/2}\exp\left(\frac{u}{2}\ln\frac{1+A(t)}{1+A(-t)}\right)\\
=&[t^n][(1+A(t))(1+A(-t))]^{R/2}(1+2H)^{u/2}\\
=&[t^n]\left[(1+A(H^{\langle -1\rangle}))(1+A(-H^{\langle -1\rangle}))\right]^{R/2}(1+2t)^{u/2}(H^{\langle -1\rangle})'\left(\frac{t}{H^{\langle -1\rangle}}\right)^{n+1}
\end{aligned}
$$

类似地，记 $Q(t)$。则要计算

$$
[t^n]Q(t)(1+2t)^{u/2}=\sum_{k\geq 0}2^k\binom{u/2}{k}[t^{n-k}]Q(t)
$$

这样就只需一个下降幂转普通幂。复杂度也与之前相同。

当然也可以对别的东西拉反（比如 $\ln(1+2H)$），略去不表。

标程实现的是这种做法。