



试题讨论

— Racing

唐文斌

题目大意

- 给定一条包含 N 条线段的折线
 - 在折线上的速度为 v_a
 - 在非折线上的速度为 v_b
 - $v_a \geq v_b$
- 求从 $(0,0)$ 到 (x_n, y_n) 的最短路.



数据规模

○ 20%

- 折线段平行于坐标轴

○ 40%

- $N \leq 40$

○ 100%

- $N \leq 1000$
- 坐标范围 $[-10^6, 10^6]$



得分情况

○ 60分:

- 俞华程(浙江)

○ 20分:

- 陈启峰(广东) 陈雪(湖南) 陈丹琦(湖南)

○ 15分:

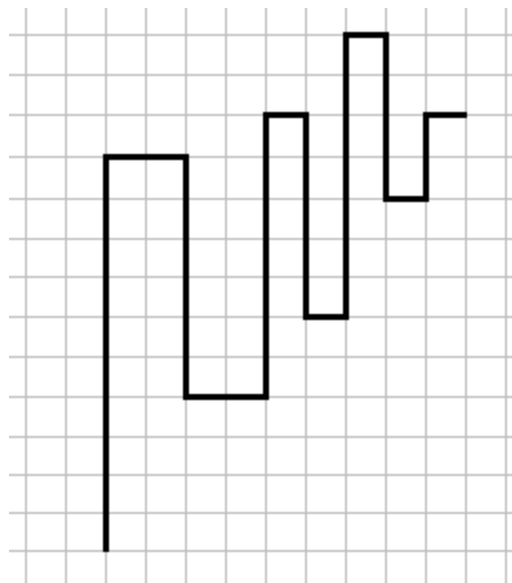
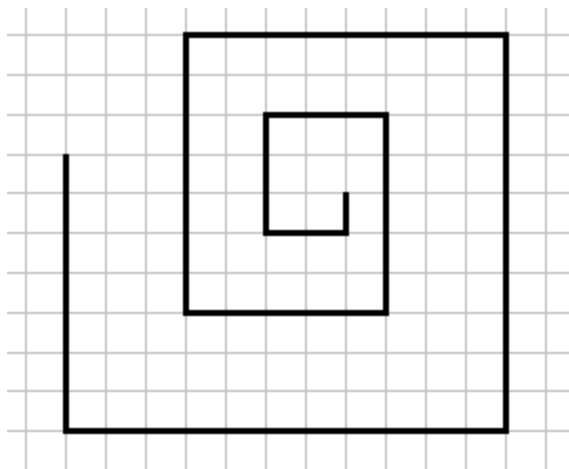
- 杨弋(安徽) 仇荣琦(湖南) 等

数据分布

○ 数据比较温柔

○ N 的分布

● 10, 48, 33, 33, 120, 130, 500, 720, 920, 930



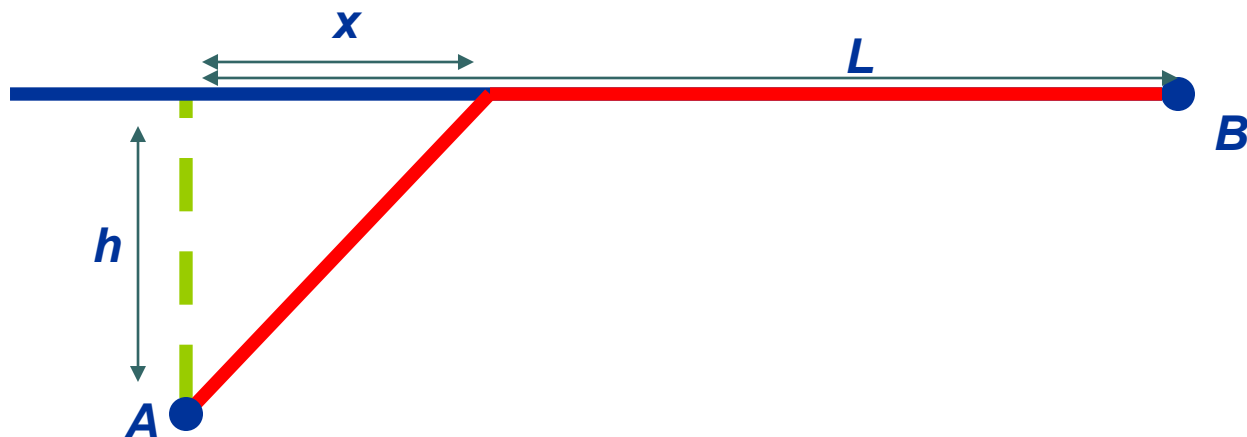


讨论

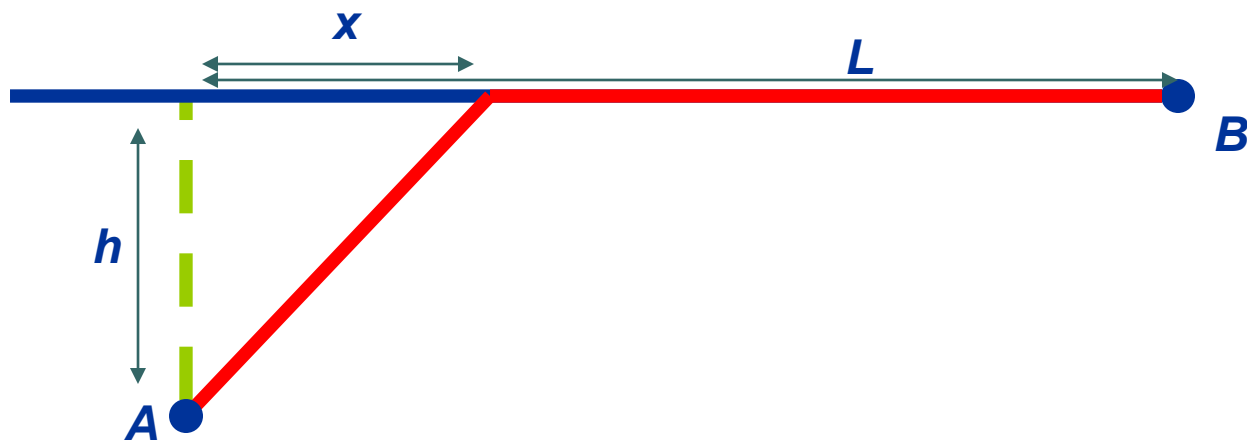


刻画状态

- 无限条路径
- 只考虑有可能成为最优解的路径 → 有限条



刻画状态



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{v_a} + \frac{L - x}{v_b} = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{v_a} - \frac{x}{v_b} + \frac{L}{v_b}$$

常数

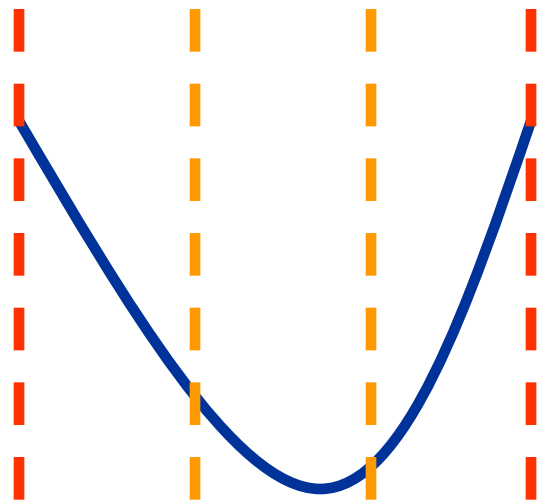
当 L 足够大时, 我们选择的极值点与 L 无关

刻画状态

○ 如何计算极值点

- 求导
- 极限
- 三分法

- 单谷函数求极值 $[low, upp]$
- $mid_1 = low + (upp - low) / 3$
- $mid_2 = upp - (upp - low) / 3$
- 若 $f(mid_1) < f(mid_2)$ 则 $min \in [low, mid_2]$
- 否则 $min \in [mid_1, upp]$



刻画状态

○ 事件点

- 所有端点： N 个
- 极值点
 - 对于每一个端点和每一条线段, 计算两个极值点
 - $2N^2$ 个

○ 我们断言:

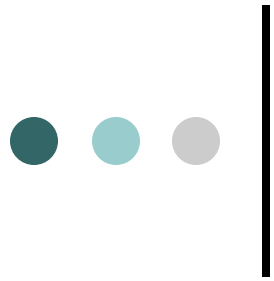
- 最优路径是由若干个事件点组成的一条折线段
- 所有的事件点 → 最短路问题

另一个断言

- 从极值点走到极值点是没有意义的。
 - [显然]
- [推论]
 - 最优路径必然是以下线段集合的一个子集
 - 称为[事件线段]
 - 从任意端到任意端点, N^2 条
 - 同一条线段上的相邻事件点的连线, N^2 条
 - 从任意端到任意线段上对应的极值点, $2N^2$ 条

算法

- 求出所有的极值点(及其对应关系)
- 构造由所有事件点与事件线段组成的稀疏图
 - $O(N^2)$ 的点, $O(N^2)$ 的边
- 对上图做单源最短路
 - **SPFA**
 - 期望时间复杂度 $O(N^2)$
 - 期望得分: 60 ~ 100
 - 用**Heap优化的Dijkstra**
 - 时间复杂度 $O(N^2 \lg N)$
 - 期望得分: 100



Thank You!