FJWC Day1 解题报告

xyz32768

讨论&吐槽

人生 简要题意

- 一个n个点的有向图，每个点有颜色，部分点的颜色已经确定
- 定义一条任意相邻点不同色的路径为交错路径
- 为所有颜色未定的点确定颜色，并为所有$1 \le i < j \le n$，确定图上从i到j的有向边是否存在
- 求有多少种方案使得该图交错路径的条数为奇数，对大质数取模
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$

子任务1：$n \leq 5$

- 随便爆搜

子任务2：$n \le 50$

- 设$end(i)$表示以i为结尾的交错路径条数
- 考虑一个DP：$f[i][j][k][h]$表示就前i个点，有j个白点和k个黑点满足其end为奇数，并且这i个点的end之和的奇偶性为h的方案数
- 转移时枚举点$i+1$的颜色
- 如果是黑色，则只有$[1,i]$中的j个end为奇数的白点才会影响$end(i+1)$的奇偶性
- 白色同理
- 枚举这些点中有多少个点向$i+1$连边之后即可求出$end(i+1) \bmod 2$的值
- 注意$end(i+1)$要算上$i+1$自己到自己的路径
- 大力讨论转移
- 最后答案为$\sum_{j,k} f[n][j][k][1]$
- $O(n^4)$

子任务3：$n \le 150$

- 我们其实没有必要枚举这j（k）个点中实际有多少个点连向了$i+1$
- 因为$end(i+1)$的奇偶性仅和这些点中连向$i+1$的点数的奇偶性有关
- 而对于一个n（$n>0$）元集合，选出一个偶数和奇数大小子集的方案数均为2^{n-1}
- 所以我们得到了新的转移：
- $f[i+1][j][k][h] += f[i][j][k][h] \times c(k,1) \times 2^{i-k}$
- $f[i+1][j+1][k][h\ xor\ 1] += f[i][j][k][h] \times c(k,0) \times 2^{i-k}$
- $f[i+1][j][k][h] += f[i][j][k][h] \times c(j,1) \times 2^{i-j}$
- $f[i+1][j][k+1][h\ xor\ 1] += f[i][j][k][h] \times c(j,0) \times 2^{i-j}$
- 其中$c(n,op)$表示一个n元集合选出一个大小奇偶性为op的子集的方案数
- 并且如果$i+1$被钦定为黑色则前两种转移不能进行，白色同理
- $O(n^3)$

子任务4：$n \le 500$
子任务5：$n \le 5000$

- 欢迎选手分享做法

正解做法

- 我们观察到：$c(k,0)\times 2^{i-k}$在$k>0$时恒为2^{i-1}，$k=0$时为2^i
- $c(k,1)\times 2^{i-k}$在$k>0$时为2^{i-1}，$k=0$时为0
- 于是我们也不用记录j和k的实际值了
- 新的状态定义：$f[i][0/1][0/1][h]$表示就前i个点，end之和的奇偶性为h，中间的两个$0/1$表示是否有end为奇数的白/黑点
- 还是大力讨论转移
- $O(n)$

赢家 简要题意

- 给定一个n个点m条边的无向图
- 求给每一条边定向使得1和2能到达同一个点的方案数
- $1 \le n \le 15$，$1 \le m \le \frac{n \times (n-1)}{2}$

子任务1：$m \le 20$

- 随便爆搜

子任务2：1和2之间存在唯一简单路径

- 答案即为1到2的简单路径上的点数再乘上2的不在路径上的边数次幂

子任务3：$n \leq 10$

- 欢迎选手分享做法

正解做法

- 考虑用总数2^m减去不合法的方案数
- 易得不合法的方案数就是1能到达的点集为S，2能到达的点集为T，S与T的交集为空的方案数
- 考虑如果已经分别求得了$f[S]$表示对点集S导出子图内的所有边定向使得1能到达点集S内所有点的方案数（$1 \in S$），$g[S]$表示从2出发
- 那么枚举S和T，就这两个点集内部的定向方案数为$f[S] \times g[T]$（注意不能有边横跨集合S和T）
- 对于点集$S \cup T$之外的所有点的导出子图，内部的边可以随便定向，方案数$2^{边数}$
- 而对于一个顶点在$S \cup T$内而一个顶点在集合外的边，它的方向必须指向集合内
- 这样就能算出答案了，由于$S \cap T = \emptyset$，所以枚举的复杂度$O(3^n)$。

正解做法

- 接下来考虑怎么求$f[S]$（g同理）
- 考虑和算答案一样的思路，总数减去不合法的方案数
- 总数显然是2^S的导出子图边数
- 扣掉不合法的方案数，考虑枚举S的一个真子集T，计算只能到达点集T的方案数
- 点集T内部的方案数显然为$f[T]$，外部的方案数为2^{S-T}的导出子图边数
- 对于横跨T和$S-T$的边，它们的方向必然指向T
- 所以这时扣掉的方案数就是$f[T] \times 2^{S-T}$的导出子图边数
- 由于枚举子集，这个DP是$O(3^n)$的

黑红兔 简要题意

- 一个长度为n的字符串
- 要从中从左往右选出若干段不相交的子串
- 使得选出的这些串中，每个串都是上一个串的严格子串
- 求最多能选出多少段
- $1 \le n \le 5 \times 10^5$

子任务1：$n \leq 100$

- 定义DP：$f[i][j]$表示以子串$[i,j]$为最后一个，最多能选出多少段
- 用Hash/SA找出子串$[i,j]$在哪些地方出现过，处理一些东西之后转移
- $O(n^4)$或$O(n^3)$

子任务2：$n \leq 1000$

- 性质1：存在一种最优方案，使得最后一段长为1且选出的每段长都比上一段小1
- 证明：如果某一段比下一段长2或以上，则显然可以在这一段的前面或后面去掉若干字符，只需保证下一段是其严格子串，最后一段长为1的证明同理
- 于是我们发现从右往左DP更有拓展性
- $f[i][j]$表示以子串$[i,j]$为开头是否能选出$j-i+1$段
- 枚举下一段与$[i,j-1]$还是$[i+1,j]$进行转移
- 应该可以优化到$O\left(n^2\right)$或$O(n^2\log n)$

子任务3：$n \le 3 \times 10^4$

- 性质2：答案不超过$O(\sqrt{n})$
- 证明：最坏情况下是$1+2+3+\cdots+k$，这时必然有$\frac{k(k+1)}{2} \le n$
- 于是把上面那个DP的第二维改成串长即可
- $O(n\sqrt{n})$或$O(n\sqrt{n}\log n)$

子任务4：$n \le 10^5$

- 让我们抛弃根号算法，继续分析性质
- 性质3：以i为第一个串的开头，如果首串长为j时能选出j段，那么首串长为$j-1$时也一定能选出$j-1$段
- 证明：可以用下面的图直观理解，红色表示j变成$j-1$删去的部分

```
pinkrabbit  pinkrabbit
pinkrabbi    inkrabbit
 inkrabbi     nkrabbit
  nkrabbi      krabbit
  nkrabb       krabbi
   krabb       krabb
   krab         rabb
    rab         rab
```

子任务4：$n \le 10^5$

- 于是我们可以把状态改成一维：$f[i]$表示首串的开头为i最多能选出多少段
- 求$f[i]$可以先二分答案mid
- 然后现在要找的就是$[i+mid,n]$内是否存在一个j满足：
- （1）$f[j] \ge mid-1$
- （2）$lcp(i,j) \ge mid-1$或$lcp(i+1,j) \ge mid-1$
- 注意到如果我们求出了原串的后缀数组，那么$lcp(i,j) \ge mid-1$相当于$rank_j$在某个区间内，$lcp(i+1,j) \ge mid-1$也是一样，这个区间可以用二分+RMQ求出
- 问题转化成求j ∈ $[i+mid,n]$且满足$rank_j$在某区间内的$f[j]$最大值
- 可持久化线段树即可维护，$O(n\log^2 n)$

正解做法

- 发现$O(n\log^2 n)$的复杂度过不了所有数据。~~卡常？~~继续分析性质
- 性质4：$f[i] \le f[i+1]+1$
- 证明类似性质3，即对于一个首串从i开始，有j个串的方案，如果删掉首串的第一个位置，那么一定可以用类似性质3的调整法得到一个从$i+1$开始，有$j-1$个串的方案
- 于是我们可以把二分改成先让$f[i] \leftarrow f[i+1]+1$之后，判断当前是否存在选出$f[i]$个串的方案，如果不行就让$f[i]$一直减一，直到合法为止
- 类似于SA求$height$，可以得出总复杂度为$O(n\log n)$

谢谢大家！