NOI 2025 Day2 C. 绝对防御

xtq/fzw

2025 年 7 月 16 日

问题（绝对防御）

- 给定一个大小为 n 的牌堆。初始摸若干张牌。每轮先摸两张牌，然后选择打出 $0,0$ 或者 $0,1$，任意连续三轮中只能打出一次 $0,0$，无法打出则判负。某轮出牌后牌堆为空则获胜。
- q 次单点修改牌堆，每次修改后求能够获胜的最小的初始摸牌数 k。

数据范围：$n,q \le 2 \times 10^5$。

$n, q \leq 100$

$n, q \leq 100$

- 显然答案关于 k 单调，因此可以二分 k，然后进行判定。

$n, q \le 100$

- 显然答案关于 k 单调，因此可以二分 k，然后进行判定。
- 设 $dp_{i,j,l}$ 表示是否可以摸前 i 张牌，剩余 j 张 0，还需 l 轮才能打出 $0, 0$。

$n, q \le 100$

- 显然答案关于 k 单调，因此可以二分 k，然后进行判定。
- 设 $dp_{i,j,l}$ 表示是否可以摸前 i 张牌，剩余 j 张 0，还需 l 轮才能打出 $0,0$。
- 时间复杂度 $O(n^2 q \log n)$，期望得分：10。

$n, q \leq 3000$

$n, q \leq 3000$

- 对于某个确定的前缀，考虑手牌中剩余的 0 和 1 的数量的所有可能取值。

$n, q \leq 3000$

- 对于某个确定的前缀，考虑手牌中剩余的 0 和 1 的数量的所有可能取值。
- 设 c_0 表示手牌中剩余的 0 的数量，c_1 表示手牌中剩余的 1 的数量。

$n, q \leq 3000$

- 对于某个确定的前缀，考虑手牌中剩余的 0 和 1 的数量的所有可能取值。
- 设 c_0 表示手牌中剩余的 0 的数量，c_1 表示手牌中剩余的 1 的数量。
- 假定全部打出 $0, 1$，则每次打出 $0, 0$ 会使得 $c_0 - c_1$ 减少 2。

$n, q \leq 3000$

- 对于某个确定的前缀，考虑手牌中剩余的 0 和 1 的数量的所有可能取值。
- 设 c_0 表示手牌中剩余的 0 的数量，c_1 表示手牌中剩余的 1 的数量。
- 假定全部打出 $0, 1$，则每次打出 $0, 0$ 会使得 $c_0 - c_1$ 减少 2。
- 因此 $c_0 - c_1$ 是某个区间中的所有奇数或所有偶数。

$n, q \leq 3000$

- 对于某个确定的前缀，考虑手牌中剩余的 0 和 1 的数量的所有可能取值。
- 设 c_0 表示手牌中剩余的 0 的数量，c_1 表示手牌中剩余的 1 的数量。
- 假定全部打出 $0, 1$，则每次打出 $0, 0$ 会使得 $c_0 - c_1$ 减少 2。
- 因此 $c_0 - c_1$ 是某个区间中的所有奇数或所有偶数。
- 设 $dp_{i,l}$ 表示摸前 i 张牌，还需 l 轮才能打出 $0, 0$ 时 $c_0 - c_1$ 的取值范围。

$n, q \le 3000$

- 对于某个确定的前缀，考虑手牌中剩余的 0 和 1 的数量的所有可能取值。
- 设 c_0 表示手牌中剩余的 0 的数量，c_1 表示手牌中剩余的 1 的数量。
- 假定全部打出 $0,1$，则每次打出 $0,0$ 会使得 $c_0 - c_1$ 减少 2。
- 因此 $c_0 - c_1$ 是某个区间中的所有奇数或所有偶数。
- 设 $dp_{i,l}$ 表示摸前 i 张牌，还需 l 轮才能打出 $0,0$ 时 $c_0 - c_1$ 的取值范围。
- 复杂度 $O(nq\log n)$，期望得分：35。

$q \le 200$

$q \le 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。

$q \le 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0,0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0,1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。

$q \le 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0, 1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。
- 也即，将 0 视作 1，1 视作 -1 时，原序列的前缀和。

$q \le 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0, 1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。
- 也即，将 0 视作 1，1 视作 -1 时，原序列的前缀和。
- 在前缀和首次取到 $k+2, k+4, \ldots$ 之前，至少需要打出一次 $0, 0$。

$q \leq 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0, 1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。
- 也即，将 0 视作 1，1 视作 -1 时，原序列的前缀和。
- 在前缀和首次取到 $k+2, k+4, \ldots$ 之前，至少需要打出一次 $0, 0$。
- 因此可以从后向前贪心地确定必须打出 $0, 0$ 的时刻。

$q \le 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0, 1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。
- 也即，将 0 视作 1，1 视作 -1 时，原序列的前缀和。
- 在前缀和首次取到 $k+2, k+4, \ldots$ 之前，至少需要打出一次 $0, 0$。
- 因此可以从后向前贪心地确定必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 由于单点修改对前缀和的影响是 $O(1)$ 的，因此对答案的影响也是 $O(1)$ 的。具体地，每次修改造成的答案的变化量不超过 6。

$q \leq 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0, 1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。
- 也即，将 0 视作 1，1 视作 -1 时，原序列的前缀和。
- 在前缀和首次取到 $k+2, k+4, \dots$ 之前，至少需要打出一次 $0, 0$。
- 因此可以从后向前贪心地确定必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 由于单点修改对前缀和的影响是 $O(1)$ 的，因此对答案的影响也是 $O(1)$ 的。具体地，每次修改造成的答案的变化量不超过 6。
- 设修改前的答案为 k，则修改后只需要在 $[k-6, k+6]$ 范围内二分。

$q \leq 200$

- 进一步地，考虑所有必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 在假定全部打出 $0, 1$ 的前提下，考虑 $c_0 - c_1$ 的变化情况。
- 也即，将 0 视作 1，1 视作 -1 时，原序列的前缀和。
- 在前缀和首次取到 $k + 2, k + 4, \ldots$ 之前，至少需要打出一次 $0, 0$。
- 因此可以从后向前贪心地确定必须打出 $0, 0$ 的时刻。
- 由于单点修改对前缀和的影响是 $O(1)$ 的，因此对答案的影响也是 $O(1)$ 的。具体地，每次修改造成的答案的变化量不超过 6。
- 设修改前的答案为 k，则修改后只需要在 $[k - 6, k + 6]$ 范围内二分。
- 时间复杂度 $O(nq)$，期望得分：40。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0,0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0,0$ 的所有时刻。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0,0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0,0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0,0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0,0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。
- 若增加一个前缀和最值的位置，则连续一段必须打出 $0,0$ 的时刻前移。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0, 0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0, 0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。
- 若增加一个前缀和最值的位置，则连续一段必须打出 $0, 0$ 的时刻前移。
- 进一步地，必须打出 $0, 0$ 的时刻形成若干个间隔 2 的连续段。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0,0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0,0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。
- 若增加一个前缀和最值的位置，则连续一段必须打出 $0,0$ 的时刻前移。
- 进一步地，必须打出 $0,0$ 的时刻形成若干个间隔 2 的连续段。
- 增加一个前缀和最值位置会使得至多三个连续段合并。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0,0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0,0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。
- 若增加一个前缀和最值的位置，则连续一段必须打出 $0,0$ 的时刻前移。
- 进一步地，必须打出 $0,0$ 的时刻形成若干个间隔 2 的连续段。
- 增加一个前缀和最值位置会使得至多三个连续段合并。
- 减少一个前缀和最值位置会分裂出至多三个连续段。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0, 0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0, 0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。
- 若增加一个前缀和最值的位置，则连续一段必须打出 $0, 0$ 的时刻前移。
- 进一步地，必须打出 $0, 0$ 的时刻形成若干个间隔 2 的连续段。
- 增加一个前缀和最值位置会使得至多三个连续段合并。
- 减少一个前缀和最值位置会分裂出至多三个连续段。
- 上述信息均可通过数据结构维护。

- 注意到上述贪心确定的必须打出 $0,0$ 的时刻与 k 无关，因此可以直接维护打出 $0,0$ 的所有时刻。
- 对于单点修改，每次修改可能会增加或减少一个前缀和最值的位置。
- 若增加一个前缀和最值的位置，则连续一段必须打出 $0,0$ 的时刻前移。
- 进一步地，必须打出 $0,0$ 的时刻形成若干个间隔 2 的连续段。
- 增加一个前缀和最值位置会使得至多三个连续段合并。
- 减少一个前缀和最值位置会分裂出至多三个连续段。
- 上述信息均可通过数据结构维护。
- 时间复杂度 $O((n+q)\log n)$，期望得分：100。

- 一些实现细节:

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。
  - 可以按奇偶性划分不同的 k。对于 n 与 k 奇偶性不同的情况，可以直接增加一张与第 n 张牌类型相同的第 $n+1$ 张牌。

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。
  - 可以按奇偶性划分不同的 k。对于 n 与 k 奇偶性不同的情况，可以直接增加一张与第 n 张牌类型相同的第 $n+1$ 张牌。
  - 可以将打出 $0,0$ 对应的前缀和 -2 拆分为三个 $-\frac{2}{3}$ 进行维护。

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。
  - 可以按奇偶性划分不同的 k。对于 n 与 k 奇偶性不同的情况，可以直接增加一张与第 n 张牌类型相同的第 $n+1$ 张牌。
  - 可以将打出 $0,0$ 对应的前缀和 -2 拆分为三个 $-\frac{2}{3}$ 进行维护。
- 部分分：

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。
  - 可以按奇偶性划分不同的 k。对于 n 与 k 奇偶性不同的情况，可以直接增加一张与第 n 张牌类型相同的第 $n+1$ 张牌。
  - 可以将打出 $0, 0$ 对应的前缀和 -2 拆分为三个 $-\frac{2}{3}$ 进行维护。
- 部分分：
  - 对于特殊性质 B，只会有段的合并；

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。
  - 可以按奇偶性划分不同的 k。对于 n 与 k 奇偶性不同的情况，可以直接增加一张与第 n 张牌类型相同的第 $n+1$ 张牌。
  - 可以将打出 $0,0$ 对应的前缀和 -2 拆分为三个 $-\frac{2}{3}$ 进行维护。
- 部分分：
  - 对于特殊性质 B，只会有段的合并；
  - 对于特殊性质 C，只会有段的分裂；

- 一些实现细节：
  - 可以用一颗线段树维护前缀最值变化情况，用另一个线段树维护连续段平移与答案计算，同时维护零点与分裂位置。
  - 可以按奇偶性划分不同的 k。对于 n 与 k 奇偶性不同的情况，可以直接增加一张与第 n 张牌类型相同的第 $n+1$ 张牌。
  - 可以将打出 $0,0$ 对应的前缀和 -2 拆分为三个 $-\frac{2}{3}$ 进行维护。
- 部分分：
  - 对于特殊性质 B，只会有段的合并；
  - 对于特殊性质 C，只会有段的分裂；
  - 对于特殊性质 AD 与特殊性质 E，部分数据结构可以替换为暴力。